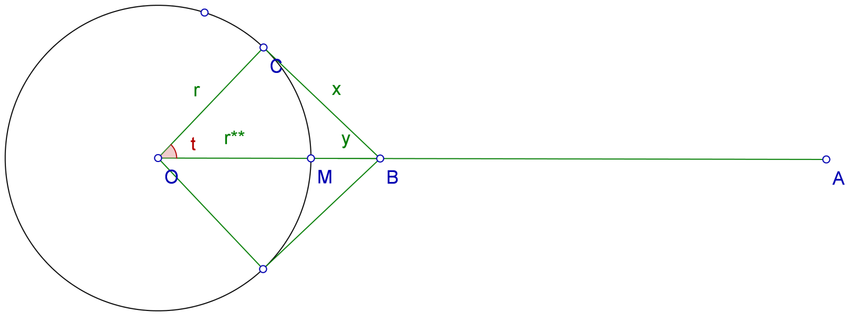
VALENCIA 2010

TRIBUNAL V4

EJERCICIO 2

Sea una cuerda de longitud L. La disponemos alrededor de una columna cilíndrica de radio r y tiramos del extremo de la cuerda con todas nuestras fuerzas, alejándonos en línea recta del eje de la columna, en dirección perpendicular a dicho eje. Calcula a que distancia de la columna quedará el lazo corredizo.

SOLUCIÓN.



Si tiramos del extremo A de la cuerda, nos alejaremos de O, de manera que la distancia entre nosotros y la columna llegará a ser máxima. Es sensato maximizar la función z=AM.

Observamos que la cuerda es tangente a la circunferencia en C, por lo que OC, que es el radio, y x = CB son perpendiculares en C. Así el triángulo OCB es rectángulo en C, siendo CB = x, OC = r, OB = OM + MB = r + y.

Si aplicamos el teorema de Pitágoras, obtenemos una relación entre x e y:

$$(r+y)^2 = r^2 + x^2 \to \cancel{r^2} + y^2 + 2ry = \cancel{r^2} + x^2 \to y^2 + 2ry = x^2 \quad (1)$$

Por otra parte, si t es el ángulo del triángulo OBC en O, podemos usarlo para calcular la longitud total de la cuerda:

$$L = \overline{AB} + 2\overline{BC} + 2r.(\pi - t) = \overline{AB} + 2x + 2r\left(\pi - \arccos\frac{r}{y+r}\right) = \overline{AB} + 2\pi r + 2x - 2r.\arccos\frac{r}{y+r}$$

Si despejamos AB y usamos (1) para poner x en función de y:

$$\overline{AB} = L - 2\pi r - 2x + 2r\arccos\frac{r}{y+r}$$

$$\overline{AB} = L - 2\pi r - 2\sqrt{y^2 + 2ry} + 2r\arccos\frac{r}{y+r}$$

En consecuencia, maximizamos

VALENCIA 2010

TRIBUNAL V4

EJERCICIO 2

$$z = \overline{AM} = \overline{MB} + \overline{AB} = y + L - 2\pi r - 2\sqrt{y^2 + 2ry} + 2r \arccos \frac{r}{y+r}$$

Derivamos,

$$z' = 1 - 2\frac{\cancel{2}y + \cancel{2}r}{\cancel{2}\sqrt{y^2 + 2ry}} - 2r\frac{-\frac{r}{(y+r)^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{y+r}\right)^2}} = 1 - 2\frac{y+r}{\sqrt{y^2+2ry}} + 2\frac{r^2}{(y+r)\sqrt{y^2+2ry}} =$$

$$1 - \frac{2}{\sqrt{y^2+2ry}}.\left[y + r - \frac{r^2}{y+r}\right] = 1 - \frac{2}{\sqrt{y^2+2ry}}.\frac{(y+r)^2 - r^2}{y+r} = 1 - 2\frac{y^2+2ry}{(y+r)\sqrt{y^2+2ry}} =$$

En consecuencia, $z' = 1 - 2\frac{\sqrt{y^2+2ry}}{y+r}$, y si igualamos a 0, nos quedará:

$$1 = 2\frac{\sqrt{y^2+2ry}}{y+r} \rightarrow y + r = 2\sqrt{y^2+2ry} \rightarrow (y+r)^2 = 4\left(y^2+2ry\right) \rightarrow 3y^2 + 6ry - r^2 = 0 \rightarrow$$

$$y = \frac{-6r \pm \sqrt{36r^2 + 12r^2}}{6} = -r + \frac{2\sqrt{3}}{3}r = \boxed{\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1\right)r}$$

Teniendo en cuenta que solo obtenemos un extremo relativo y que debe existir necesariamente un máximo, se alcanza en este punto, que es además, la solución del problema.