TEMA 45
POLIEDROS
TEOREMA DE EULER
SÓLIDOS PLATÓNICOS Y ARQUIMEDIANOS

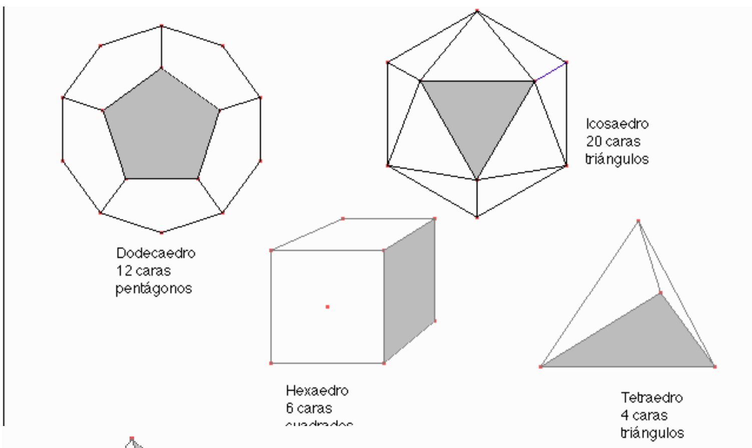
1. INTRODUCCIÓN.

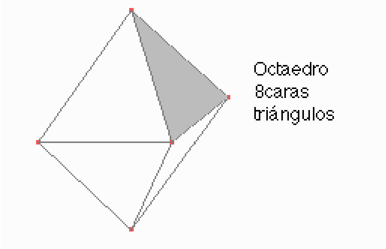
El estudio de los poliedros comenzó en la Grecia clásica. Según el sumario de Eudemo, los pitagóricos crearon las figuras cósmicas, o sea, los poliedros. Sin embargo, esto parece bastante dudoso.

Aunque algunos poliedros podían haber sido observados en la naturaleza, concretamente en los cristales minerales, el libro trece de los elementos de Euclides explica que los pitagóricos sólo conocían tres de estas figuras: El cubo, el octaedro, y el dodecaedro.

El conocimiento de esta última figura parece cierto tras el descubrimiento de un dodecaedro etrusco de piedra que data del siglo seis o siete antes de Cristo.

Se debe a Platón y sus seguidores un estudio muy completo de los cinco sólidos regulares. Por ello los poliedros regulares son conocidos también como sólidos platónicos. Tomando como base estos sólidos, se construyó una teoría cosmogónica que perduró durante siglos: los cuatro elementos de la naturaleza estaban representados por cuatro de ellos, y el quinto era el símbolo del universo. El tetraedro era el fuego, el octaedro el aire, el cubo la tierra, y el y icosaedro el agua. El dodecaedro simbolizaba el cosmos.





Se atribuye a Teeteto, un amigo personal de Platón el estudio más exhaustivo de los poliedros regulares. Si esto es cierto, a él se le debe el Teorema fundamental que dice que hay cinco y sólo cinco poliedros regulares. También calculó las razones de las aristas al radio de la esfera circunscrita, que aparecen en el libro trece de los elementos.

Platón consideraba al dodecaedro como formado por trescientos sesenta triángulos rectángulos escalenos, que se obtienen al trazar en cada cara pentagonal las cinco diagonales y las cinco medianas, de manera que cada una de las doce caras queda descompuesta en treinta triángulos rectángulos. Según la teoría cosmogónica de los platónicos, todo está formado a base de triángulos rectángulos ideales, y toda ciencia debe estar basada en el estudio de éstos triángulos.

Según un comentario de Pappus de Alejandría, Arquímedes fue el descubridor de los trece sólidos semirregulares, por lo que se les llama sólidos arquimedianos.

2. POLIEDROS.

2.1. DEFINICIÓN Y ELEMENTOS.

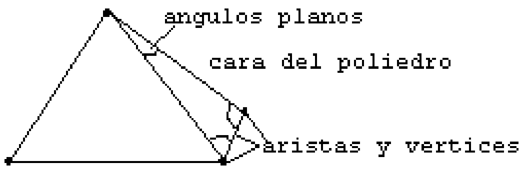
Poliedro: Un poliedro es un sólido o cuerpo geométrico limitado por un conjunto finito de polígonos planos tales que:

1. Cada uno de los lados pertenece a dos de dichos polígonos.
2. Dos polígonos cualesquiera que tengan un lado común no pertenecen a un mismo plano.

Los polígonos del conjunto se llaman **caras del poliedro**.

Los lados y vértices de los polígonos se llaman **aristas y vértices del poliedro,** respectivamente.

Los ángulos internos de los polígonos se llaman **ángulos planos del poliedro**.



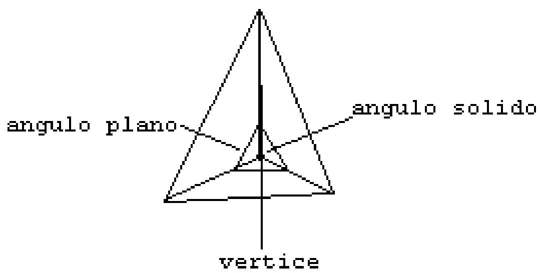
Dos caras que tengan una arista en común se llaman **caras contiguas del poliedro**.

Los planos de dos caras contiguas forman un ángulo diedro que recibe el nombre de **diedro del poliedro.**

En cada vértice se forma un ángulo:

- cuyas aristas son las del poliedro que concurren en ese vértice,
- cuyas caras son los ángulos planos que tienen ese vértice común,

Este ángulo recibe el nombre de **ángulo sólido del poliedro**.



Las **diagonales** de un poliedro son las rectas que unen dos vértices no situados en una misma cara.

El **plano diagonal** es el determinado por un vértice y una arista no adyacentes, o por dos aristas, sin ser cara en ningún caso.

Los poliedros o n-edros se designan según el número n (n>3) de sus caras, así:

Tetraedro	n=4	Octaedro	n=8
Pentaedro	n=5	Dodecaedro	n=12
Exaedro	n=6	Icosaedro	n=20

Pero hay algunos que reciben nombres particulares, como:

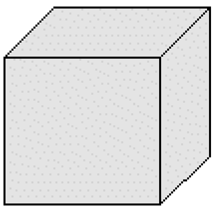
- Pirámide, formada por un polígono cualquiera de cuyas aristas salen triángulos que convergen todos en un mismo vértice. El polígono es la base de la pirámide.
- Prisma, formado por dos polígonos iguales paralelos, unidos por caras laterales que son paralelogramos. El prisma puede ser recto si las caras laterales son rectángulos u oblicuo en otro caso.
- Antiprisma, como el prisma pero con caras laterales triangulares.
- Ortoedro, formado por rectángulos.
- Deltaedro, formado por triángulos.

Los polígonos planos que limitan un poliedro constituyen el **contorno** del mismo. La superficie de los polígonos constituye la **superficie del poliedro**. El contorno de un poliedro es una **superficie poliédrica** finita y cerrada. Sin embargo, el contorno de un polígono es una línea cerrada.

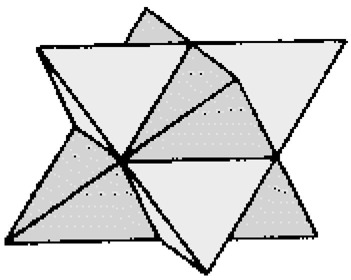
Un poliedro de n aristas tiene n diedros y si tiene n vértices tendrá n ángulos sólidos.

DEFINICIÓN. POLIEDRO CONVEXO

Un poliedro se dice convexo si al considerar una cualquiera de sus caras, queda todo él en una de las dos regiones en que el plano de aquella cara divide al espacio. En otro caso, se llama cóncavo. Equivalentemente, un poliedro es convexo si ninguno de los planos que contienen a sus caras lo corta.



Convexo



Cóncavo

De la definición de poliedro convexo se deducen las propiedades siguientes:

1. **Si dos vértices A y B pertenecen al mismo tiempo a dos caras α y β, el segmento AB es la arista del poliedro que es lado común a las caras α y β.**
2. **Las caras son polígonos convexos, continuos no entrecruzados.**
3. **Los ángulos sólidos son convexos, no entrecruzados.**
4. **Dos caras no tiene más puntos comunes que los de la arista común.**
5. **Dos puntos distintos de la superficie pueden siempre unirse mediante una línea continua trazada sobre ella.**

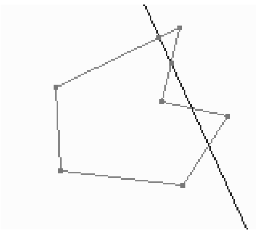
6. Una recta (no perteneciente a una cara) corta a la superficie del poliedro en dos puntos, siempre que contenga puntos internos.

Veámoslo:

Supongamos que la recta ACB pasa por los puntos A, B, C del poliedro y este punto pertenece a una cara γ, el punto A pertenece a una cara α y B a otra β. En este caso los puntos A y B no estarían en el mismo semiespacio respecto a γ y el poliedro no sería convexo.

7. La sección producida por un plano en un poliedro convexo ha de ser un polígono convexo.

Veámoslo:



Supongamos que la sección no fuera un polígono convexo. Entonces podemos trazar una recta que corte a este polígono en 4 puntos, ya que tendrá un ángulo cóncavo. Luego esta recta corta a un poliedro convexo en 4 puntos, y esto es absurdo, según la propiedad 6.

2.2. GÉNERO Y ESPECIE.

Definición 1: El **género** de un poliedro es el número de sus caras.

Definición 2: Proyectando la superficie de un poliedro desde un punto interior convenientemente elegido, para que los rayos proyectantes atraviesen la superficie igual número de veces en todos los sentidos, este número se llama **especie del poliedro**.

Los poliedros convexos son todos de primera especie, evidentemente.

Los poliedros, atendiendo a su especie, podrán ser:

1. Convexos o de primera especie.
2. Estrellados o de especie superior.

De lo expuesto se deduce el **TEOREMA** siguiente:

En un poliedro convexo de caras del mismo género (igual número de lados) y de ángulos poliedros del mismo número de aristas, se cumple:

$2A = nC = mV$, donde:

A = número de aristas del poliedro;

C = número de caras del poliedro;

V = número de vértices del poliedro;

n = número de lados de cada cara;

m = número de aristas de cada vértice.

La justificación de esto es fácil de razonar: si multiplicamos el número de caras por el número de aristas que tiene cada cara, obtendremos dos veces el número total de aristas, ya que cada arista pertenece a dos caras diferentes y, por tanto, la contaremos dos veces. Como cada arista está limitada por dos vértices diferentes, si multiplicamos el número de vértices por el número de aristas que inciden en cada vértice, también contaremos el número de aristas dos veces.

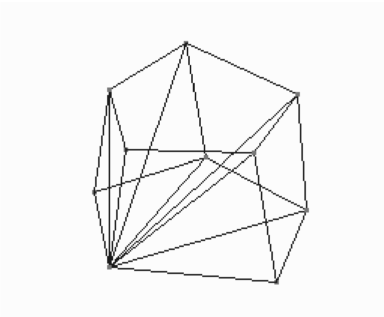
DEFINICIÓN:

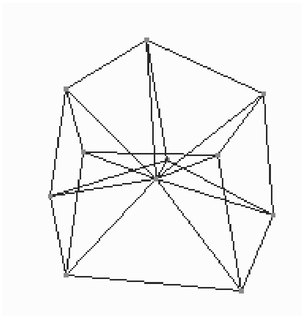
Si en un poliedro (convexo o no) suprimimos una cara, o varias contiguas, obtenemos una superficie denominada **superficie poliédrica finita o casquete poliédrico**.

Los lados de los polígonos que no son ya comunes a dos caras constituyen una línea poligonal cerrada, plana o alabeada, que se llama **orla del casquete esférico**.

Una superficie poliédrica finita puede tener una o varias orlas según que las caras suprimidas en el poliedro sean o no contiguas.

2.3. DESCOMPOSICIÓN DE UN POLIEDRO.



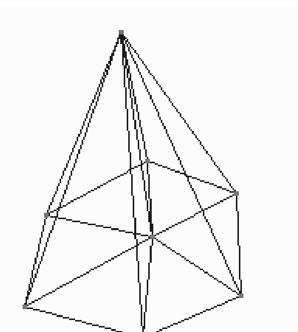


Todo poliedro puede descomponerse en pirámides y en tetraedros.

El poliedro convexo se descompone en pirámides, cosa que se puede hacer de dos formas:

1. Teniendo todas las pirámides por vértice común un vértice del poliedro, y por bases respectivas las caras que no contienen ese vértice.
2. Teniendo por bases, sucesivamente, todas las caras del poliedro y por vértice común un punto interior.

El poliedro cóncavo puede descomponerse, primeramente, en poliedros convexos prolongando las caras que al hacerlo lo cortan, para después descomponer dichos poliedros convexos en pirámides.



Descomposición en tetraedros

Como toda pirámide se puede descomponer en tetraedros entonces todo poliedro se puede descomponer en tetraedros. Para descomponer una pirámide en tetraedros podemos trazar un segmento que una el vértice con un punto cualquiera de la base. Después, consideramos por cada arista lateral un plano que la contiene a ella y al segmento anterior. Con ello tendremos un tetraedro por cada cara lateral, la unión de los cuales nos dará la pirámide original.

3. TEOREMA DE EULER

3.1. TEOREMA DE EULER.

En todo poliedro convexo el número de caras más el de vértices es igual al de aristas más dos unidades, o sea, $C + V = A + 2$.

Demostración.

Sean A = número de aristas; C = número de caras y V = número de vértices del poliedro convexo.

Separamos de él una cara y obtenemos un casquete poliédrico que tendrá:

V vértices, A aristas y C' =C - 1 caras.

Luego demostrar en el poliedro la relación de Euler C + V = A + 2 equivale a demostrar en el casquete poliédrico que C' + V =A + 1 .

Veamos pues, que C' + V =A + 1 , siendo C' =C - 1

En el casquete considerado suprimimos una cara marginal y llamamos " a " al número de aristas de ella que formaban parte de la orla del casquete antes de suprimirla.(Se debe tener en cuenta que en este primer paso a = 1). De esta forma obtenemos un nuevo casquete con V_1 vértices, C_1 caras y A_1 aristas tales que

$$V_1 = V - (a-1) \quad , \quad A_1 = A - a \quad , \quad C_1 = C' - 1$$

Luego, $V_1 + C_1 - A_1 = V - (a-1) + C' - 1 - A + a = V - a + 1 + C' - 1 - A + a = V + C' - A$

Por lo tanto, $V_1 + C_1 - A_1 = V + C' - A$

Es decir, $V + C' - A$ permanece constante al suprimir caras marginales.

Repetimos el proceso, quitamos otra cara marginal y llamamos "b" al número de aristas de esta cara que pertenecían a la orla del casquete antes de eliminarla.

Así, obtenemos un nuevo casquete con:

$$V_2 = V_1 - (b-1) \quad , \quad A_2 = A_1 - b \quad , \quad C_2 = C_1 - 1$$

Entonces,

$$V_2 + C_2 - A_2 = V_1 - b + 1 + C_1 - 1 - A_1 + b = V_1 + C_1 - A_1$$

Pero ya hemos visto que $V_1 + C_1 - A_1 = V + C' - A$,

por lo tanto, $V_2 + C_2 - A_2 = V + C' - A$

Repetimos el proceso hasta llegar al último polígono plano de n lados y se tendrá:

$$V_{C'-1} = n \quad , \quad C_{C'-1} = 1 \quad , \quad A_{C'-1} = n$$

entonces,

$$V_{C'-1} + C_{C'-1} - A_{C'-1} = n + 1 - n = 1$$

Luego,

$$1 = V + C' - A \quad \Rightarrow \quad V + C' = A + 1$$

3.2. CONSECUENCIAS DEL TEOREMA DE EULER.

COROLARIO 1.

El número de caras que tiene un número impar de lados es par y el número de ángulos sólidos o de vértices que tienen un número impar de caras es par.

Demostración.

Denotaremos por

C_3, C_4, C_5 ,... el número de caras triláteras, cuadriláteras, pentaláteras,... de un poliedro convexo cualquiera.

V_3, V_4, V_5 ,... el número de vértices en que concurren 3,4,5,... aristas.

Entonces,

(1) $C = C_3 + C_4 + C_5 + \ldots$ =nº de caras (3) $V = V_3 + V_4 + V_5 + \ldots$ = nº de vértices

(2) $2\mathrm{A} = 3C_3 + 4C_4 + 5C_5 + \ldots$ (4) $2\mathrm{A} = 3V_3 + 4V_4 + 5V_5 + \ldots$

De (2) obtenemos $2\mathrm{A} = (2C_3 + 4C_4 + 4C_5 + 6C_6 \ldots) + C_3 + C_5 + C_7 + \ldots$

entonces como 2A es par y $(2C_3 + 4C_4 + 4C_5 + 6C_6 \ldots)$ también es par tenemos que $C_3 + C_5 + C_7 + \ldots$ es un número par.

De (4) obtenemos $2\mathrm{A} = (2V_3 + 4V_4 + 4V_5 + 6V_6 + 6V_7 + \ldots) + V_3 + V_5 + V_7 + \ldots$

Entonces por razonamiento análogo al anterior $V_3 + V_5 + V_7 + \ldots$ es un número par.

COROLARIO 2.

$$2C = 4 + V_3 + 2V_4 + 3V_5 + 4V_6 + \ldots$$

$$2V = 4 + C_3 + 2C_4 + 3C_5 + 4C_6 + \ldots$$

Demostración.

Multiplicando la expresión C + V = A + 2 por 2 obtenemos 2 C + 2 V = 2 A + 4.

De (3) y (4) obtenemos:

$$2C + 2V_3 + 2V_4 + 2V_5 + \ldots = 3V_3 + 4V_4 + 5V_5 + \ldots + 4$$

entonces

$$2C = 4 + V_3 + 2V_4 + 3V_5 + 4V_6 + \ldots$$

De (1) y de (2) obtenemos:

$$2C_3 + 2C_4 + 2C_5 + \ldots + 2V = 3C_3 + 4C_4 + 5C_5 + \ldots + 4$$

Entonces

$$2V = 4 + C_3 + 2C_4 + 3C_5 + 4C_6 + \ldots$$

COROLARIO 3.

En todo poliedro convexo el número de caras triangulares más el número de ángulos triedros es por lo menos igual a ocho; o sea que no pueden faltar a la vez caras triangulares y ángulos triedros.

COROLARIO 4.

No existe ningún poliedro convexo que tenga todas sus caras con más de cinco lados, ni todos sus ángulos sólidos con más de 5 aristas.

COROLARIO 5.

La suma de los ángulos de todas las caras de un poliedro convexo es igual a tantas veces cuatro rectos como vértices tiene menos dos.

Demostración.

La suma de los ángulos de una cara cualquiera de n lados se puede obtener descomponiéndola en n triángulos a partir de un punto interior, resultando: π.n – 2π = π.(n-2)

Designando por n, n', n'',.... el número de lados de las distintas caras.

y por Σ la suma de los ángulos de todas las caras se tendrá para todas ellas:

$$\pi((n-2)+(n'-2)+(n''-2)+\ldots)=\Sigma$$

y como esta suma tiene C términos, será

$$\Sigma=\pi((n+n'+n''+\ldots)-2C)$$

Por pertenecer cada lado a 2 caras, el paréntesis es igual a 2A. Por lo tanto:

$$\Sigma=2\pi(A-C).$$

Por el teorema de Euler: C + V = A + 2, de donde A-C = V-2.

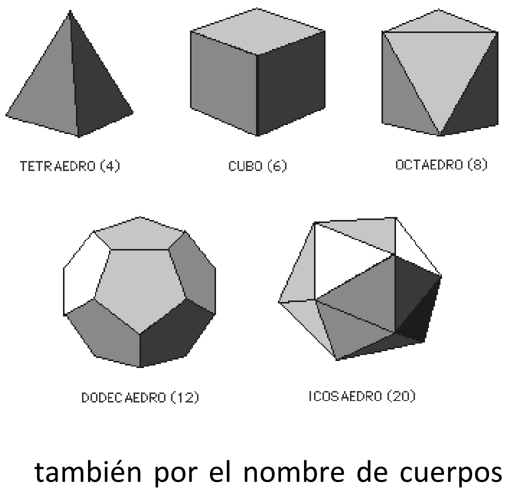
Luego, $\Sigma=2\pi(A-C)=2\pi(V-2)$

4. SÓLIDOS PLATÓNICOS.

4.1. LOS POLIEDROS REGULARES.

Poliedro regular es aquel cuyas caras son polígonos regulares iguales y tienen iguales entre sí sus ángulos diedros y poliedros.

Hemos definido los poliedros en general y demostraremos que sólo existen cinco poliedros convexos con caras del mismo número de lados y ángulos sólidos del mismo número de aristas; luego sólo habrá cinco poliedros regulares convexos que son: el tetraedro regular, el octaedro regular y el icosaedro regular que tienen por caras triángulos equiláteros iguales. El hexaedro regular o cubo cuyas caras son cuadrados y el dodecaedro regular, formado por pentágonos regulares iguales. Estos cinco poliedros regulares se conocen también por el nombre de cuerpos platónicos. De estos cuerpos elementales, Platón consideraba sólo las superficies ya que daba mucha más importancia a la forma que a la materia. Así esas superficies las descomponía en triángulos elementales de dos clases: isósceles a partir del cuadrado y escalenos a partir del triángulo equilátero y del pentágono. De los cinco poliedros cuatro corresponden a los cuatro elementos: fuego, aire, agua, y tierra; de la siguiente forma: el



tetraedro es la figura elemental del fuego, el octaedro es la del aire, el icosaedro la del agua y el cubo la de la tierra. Pero existe todavía un quinto elemento, el dodecaedro, que desde el punto de vista del simbolismo geométrico, goza de las siguientes propiedades: limitado por doce caras pentagonales, descomponible cada una de ellas en treinta triángulos, está formado por 360 elementos, lo cual representa el número de días siderales o el de los grados de la circunferencia. Además, el volumen del dodecaedro es, junto con el del icosaedro, el que más se aproxima al de la esfera, o sea, la figura perfecta, que según los pitagóricos debía de ser la del mundo.

4.2 TEOREMA DE EXISTENCIA Y CLASIFICACIÓN.

TEOREMA.

No puede haber más que cinco poliedros regulares convexos.

Demostración.

Esto equivale a decir: no puede haber más que cinco géneros de poliedros convexos, en los cuales todas las caras tengan igual número de lados y todos los ángulos sólidos el mismo número de caras.

En efecto, sea x el número de lados de cada cara e y el número de caras de cada ángulo poliedro. Como cada arista pertenece a dos caras, tendremos:

2 A = x C = y V,

y, según el Teorema de Euler,

C + V = A + 2

De estas igualdades se deduce que

$$C = \frac{4y}{2(x+y)-xy} \qquad (1)$$

Pero C, x, y, son, necesariamente, enteros y positivos; luego es necesario que

2 x + 2 y > x y

de donde

$$y < \frac{2x}{x-2} = \frac{2(x-2)+4}{x-2} = 2 + \frac{4}{x-2},$$

y como $\frac{4}{x-2}$ valdrá como máximo 4, entonces y < 6. Dada la perfecta simetría de la desigualdad de partida, podemos concluir también que x < 6.

Podemos, pues, afirmar que no hay ningún poliedro regular convexo en el cual cada cara tenga más de cinco lados, ni cada ángulo sólido más de cinco caras.

Hagamos ahora:

1º) Si x = 3, de (1) obtenemos que $C = \frac{4y}{6-y}$ (2).

Dando a y los valores 3, 4, 5, los únicos posibles, obtenemos de (2) respectivamente, los valores 4, 8, 20 para C.

Es decir, que con el triángulo equilátero se podrán formar tres poliedros regulares convexos; el tetraedro, el octaedro, y el icosaedro.

2º) Para x = 4, $C = \frac{2y}{4-y}$.

Solamente podemos dar a y el valor 3, para el cual resulta C = 6.

Luego con el cuadrado se puede formar un solo poliedro regular convexo, el cubo.

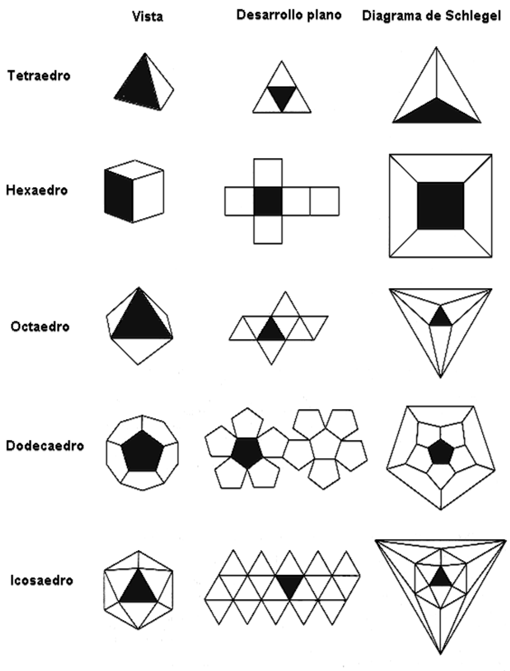
3º) Si x = 5, $C = \frac{4y}{10-3y}$

y sólo admite el valor 3, que da para C el valor 12.

Luego, con el pentágono se puede formar solamente un poliedro regular convexo, el dodecaedro.

Los poliedros regulares convexos posibles son, pues, cinco, cuyos números de caras, vértices y aristas, C, V, A y los números x e y de lados de cada cara y caras de cada ángulo poliedro, se expresan en el siguiente cuadro:

POLIEDROS	C	V	A	x	y
Tetraedro	4	4	4	3	3
Cubo	6	8	12	4	3
Octaedro	8	6	12	3	4
Dodecaedro	12	20	30	5	3
Icosaedro	20	12	30	3	5



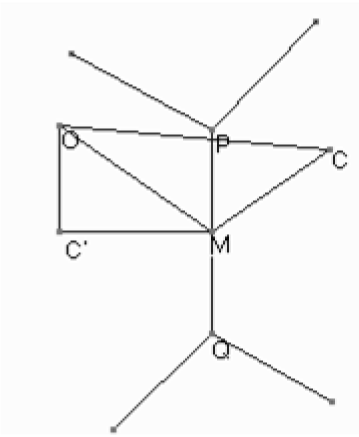
En la figura adyacente se representan estos poliedros de tres maneras: Vista en perspectiva, desarrollo plano y diagrama de Schlegel. Este última corresponde a la vista de un poliedro cuando lo aplastamos sobre una de sus caras, que estiramos de modo que contenga a todas las demás.

4.3 TEOREMA DE EXISTENCIA DEL CENTRO.

En todo poliedro regular existe un punto llamado centro que equidista de todas las caras, así como de todas las aristas, y de todos los vértices.

Demostración.

Consideremos dos caras contiguas de un poliedro regular que coinciden en una arista PQ. Consideramos el plano perpendicular a PQ por su punto medio M. Este plano es perpendicular a ambas caras del poliedro, y como pasa por M contiene las dos rectas mediatrices de PQ que están en los planos de las caras consideradas.



Estas mediatrices son perpendiculares a un lado de un polígono regular, PQ, por su punto medio, luego pasan por los centros de los polígonos respectivos, C y C'.

Si consideramos las rectas contenidas en el plano inicial CC'M, perpendiculares a C y C', se cortaran en un punto O, puesto que son coplanarias y no paralelas.

Entonces tenemos dos triángulos OCM y OC'M que concurren en un lado OM y son rectángulos en C y C'. Como CM = C'M = apotema del polígono regular que es la cara del poliedro, los triángulos OCM y OC'M tienen dos lados iguales, CM = C'M y OM común, y un ángulo igual, luego son iguales.

Esto significa que el punto O equidista de las caras consideradas y de los puntos P y Q por estar en la mediatriz de PQ. Como el razonamiento es independiente de las caras contiguas elegidas, tenemos que los triángulos OCM, OC'M, OMP, OMQ serán los mismos, tomemos el par de caras que tomemos, luego O cumple las hipótesis del teorema.

4.4. ÁREA DE LOS POLIEDROS REGULARES CONVEXOS.

El área de la superficie de un poliedro regular se obtiene multiplicando por el número de sus caras el área de una de ellas, ya que todas son iguales. El problema se reduce a la determinación del área de un triángulo equilátero, un cuadrado o un pentágono regular; área que se obtiene generalmente en función del lado de estos polígonos o arista del poliedro, o bien, en función del radio de la esfera circunscrita.

4.5. VOLUMEN DE LOS POLIEDROS REGULARES.

En los poliedros regulares todos sus vértices equidistan de un punto interior al poliedro, denominado centro. Haciendo pasar planos por este punto y por cada una de las aristas, el poliedro queda descompuesto en tantas pirámides iguales como caras tiene. Por consiguiente, para calcular el volumen de un poliedro regular basta hallar el volumen de una de estas pirámides y multiplicarlo por el número de caras.

El volumen de una pirámide es $\frac{1}{3}Br$, donde B es el área de la base (en nuestro caso de la cara del poliedro) y 'r' el apotema (distancia del centro del poliedro al centro de la cara), o radio de la esfera inscrita. Si llamamos C al número de caras, tenemos: $V = \frac{1}{3} C B r$.

Como C B = S (área total del poliedro), resulta: $V = \frac{1}{3} S r$.

Por tanto, el volumen de un poliedro regular es la tercera parte del producto de su área por el apotema.

Si llamamos "a" a la longitud de la arista, y haciendo los necesarios cálculos, llegaremos a las fórmulas siguientes para las áreas y volúmenes de los sólidos regulares:

POLIEDRO	**ÁREA**	**VOLUMEN**
Tetraedro	$a^2\sqrt{3}$	$\frac{1}{12} a^3\sqrt{3}$
Cubo	$6a^2$	a^3
Octaedro	$2a^2\sqrt{3}$	$\frac{1}{3} a^3\sqrt{2}$
Dodecaedro	$15a^2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{2}}$	$\frac{5}{2} a^3\sqrt{\frac{47+21\sqrt{5}}{10}}$
Icosaedro	$5a^2\sqrt{3}$	$\frac{5}{6} a^3\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{6}}$

5. SÓLIDOS ARQUIMEDIANOS.

Aparte de los poliedros platónicos, existen otros poliedros que cumplen ciertas regularidades y que reciben el nombre de poliedros arquimedianos, debido a su creador Arquímedes de Siracusa.

DEFINICIÓN.

Se llaman poliedros arquimedianos a los poliedros convexos formados por caras regulares (pero no del mismo número de lados) y ángulos sólidos iguales o simétricos (no regulares).

Para ver algunos de ellos antes del estudio que vamos a realizar, se debe examinar el anexo.

Las caras son de dos o tres tipos y los ángulos sólidos son o triedros o tetraedros o pentaedros.

La posibilidad de existencia de estos poliedros se analiza partiendo de los ángulos sólidos que se pueden formar acoplando polígonos regulares alrededor de un vértice, de modo que la suma de los ángulos sea inferior a 360º. De aquí que las caras sólo pueden ser de 2 o 3 tipos de polígonos, puesto que la suma de ángulos de 4 tipos distintos, triángulo equilátero, cuadrado, pentágono y hexágono regulares, es mayor de 360º.

Veamos cuales son los poliedros arquimedianos:

Sean C_a, C_b, C_c el número de caras de a, b, c lados y n_a, n_b, n_c el número de caras que concurren en un vértice; se tendrá (de la relación $2A = nC = mV$):

$$C_a a = V n_a \quad , \; C_b b = V n_b \quad , \; C_c c = V n_c \qquad (1)$$

Como,

- $C = C_a + C_b + C_c$ (nº total de caras)
- $A = \frac{1}{2}(C_a a + C_b b + C_c c) = \frac{1}{2}(V n_a + V n_b + V n_c)$

Así,

- $A = \frac{V}{2}\left(n_a + n_b + n_c\right)$
- $C = \frac{V n_a}{a} + \frac{V n_b}{b} + \frac{V n_c}{c} = V\left(\frac{n_a}{a} + \frac{n_b}{b} + \frac{n_c}{c}\right)$

Sustituyendo en C + V = A + 2 :

$$V\left(\frac{n_a}{a} + \frac{n_b}{b} + \frac{n_c}{c}\right) + V = \frac{V}{2}\left(n_a + n_b + n_c\right) + 2$$

Operando llegamos a la siguiente expresión:

$$V\left[2abn_c + 2c\left(bn_a + an_b\right) + abc\left(2 - n_a - n_b - n_c\right)\right] = 4abc$$

Llamamos $\Delta = 2abn_c + 2c\left(bn_a + an_b\right) + abc\left(2 - n_a - n_b - n_c\right)$

Entonces, $V\Delta = 4abc \;\; \Rightarrow \;\; V = \frac{4abc}{\Delta}$, y sustituyendo en (1) tenemos:

- $C_a = \frac{4abc}{\Delta a} n_a = \frac{4bc}{\Delta} n_a$
- $C_b = \frac{4abc}{\Delta b} n_b = \frac{4ac}{\Delta} n_b$
- $C_c = \frac{4abc}{\Delta c} n_c = \frac{4ab}{\Delta} n_c$

Cuando sólo haya caras de 2 tipos a, b se prescindirá de la 3ª, siendo

$$n_c = 0 \quad y \quad \Delta = 2\left(bn_a + an_b\right) + ab\left(2 - n_a - n_b\right)$$

Por el corolario 4 del teorema de Euler sabemos que $n_a + n_b + n_c \leq 5$. Teniendo en cuenta esto, se obtienen 14 soluciones enteras que se corresponden con los catorce sólidos semirregulares (Observemos que hay dos iguales)

Nombre	C	V	A	**Ángulos diedros**
Tetraedro truncado	4 triángulos 4 hexágonos	12	18	70º 32' (hex-hex) 109º 28' (hex-tri)
Cuboctaedro	8 triángulos 6 cuadrados	12	24	125º 16'
Cubo truncado	8 triángulos 6 octógonos	24	36	90º (oct-oct) 125º 16' (oct-tri)
Octaedro truncado	6 cuadrados 8 hexágonos	24	36	109º 28' (hex-hex) 125º 16' (hex-cuad)
Pequeño rombicuboctaedro	8 triángulos 18 cuadrados	24	48	135º (cua-cua) 144º 44' (cua-tri)
Gran rombicuboctaedro o cuboctaedro truncado	12 cuadrados 8 hexágonos 6 octógonos	48	72	135º (0ct-cua) 125º 16' (oct-hex) 144º 44' (hex-cua)
Cubo achatado	32 triángulos 6 cuadrados	24	60	142º 59' (cua-tri) 153º 14' (tri-tri)
Icosidodecaedro o Triakontágono	20 triángulos 12 pentágonos	30	60	142º 37'
Dodecaedro truncado	20 triángulos 12 decágonos	60	90	116º 34' (dec-dec) 142º 37' (dec-tri)
Icosaedro truncado	12 pentágonos 20 hexágonos	60	90	138º 11' (hex-hex) 142º 37' (hex-pen)
Pequeño rombicosidodecaedro	20 triángulos 30 cuadrados 12 pentágonos	60	120	148º 17' (dec-cua) 159º 6' (tri-cua)
Gran rombicosidodecaedro o icosidodecaedro truncado	30 cuadrados 20 hexágonos 12 decágonos	120	180	148º 17' (dec-cua) 142º 37' (dec.hex) 159º 6' (hex-cua)
Dodecaedro achatado	80 triángulos 12 pentágonos	60	150	152º 56' (pen-tri) 164º 11' (tri-tri)

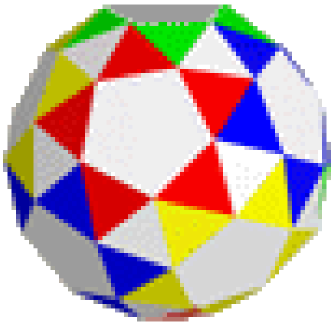
Prolongando las caras de los poliedros arquimedianos se forman los cinco sólidos platónicos, o lo que es lo mismo: los arquimedianos pueden generarse por truncamiento en dichos cinco poliedros. Este truncamiento se realiza cortando los vértices del poliedro mediante un plano que secciona todas las aristas que inciden en el vértice, bien por el punto medio de la arista, bien por el punto que la triseca. Así tenemos asegurada la obtención de polígonos regulares o semirregulares:

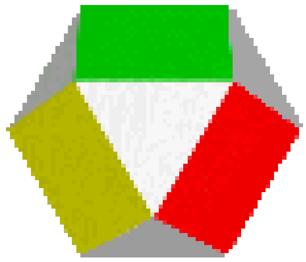
El poliedro I (tronco-tetraedro) se obtiene truncando el tetraedro, cortando las aristas a una distancia del vértice de 1/3 de su longitud.

Desde el II (tronco-cubo) al VII (cubo-romo) se obtienen del hexaedro u octaedro.

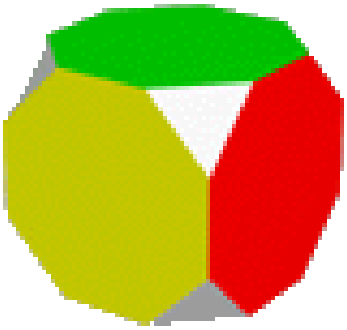
Desde el VIII (tronco-dodecaedro) al XIII (dodecaedro-romo) se obtienen del dodecaedro o icosaedro.

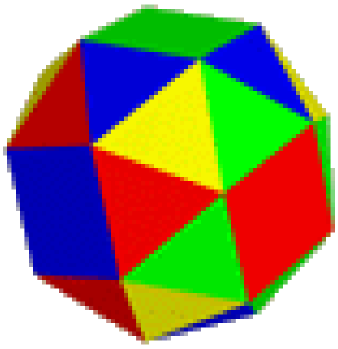
ANEXO. LOS SÓLIDOS SEMIRREGULARES



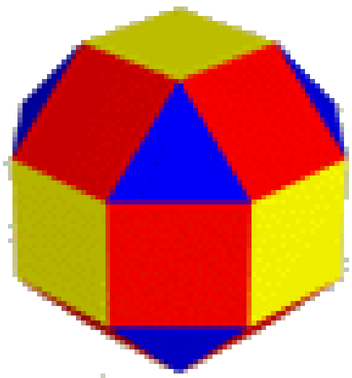


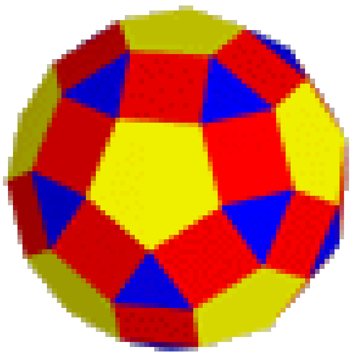
DODECAEDRO ACHATADO CUBOCTAEDRO



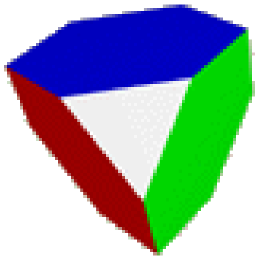


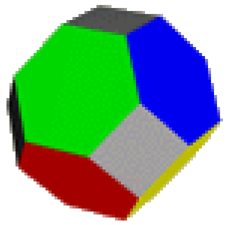
CUBO TRUNCADO CUBO ACHATADO



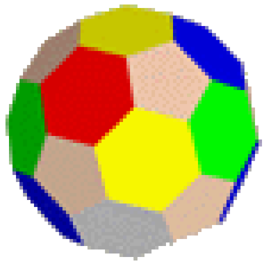


PEQUEÑO ROMBICUBOCTAEDRO PEQUEÑO ROMBICOSIDODECAEDRO

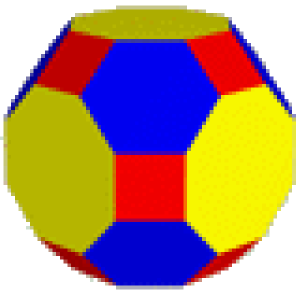


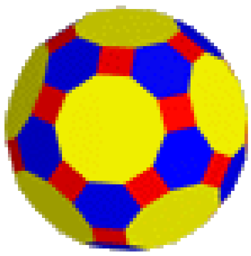


TETRAEDRO TRUNCADO OCTAEDRO TRUNCADO

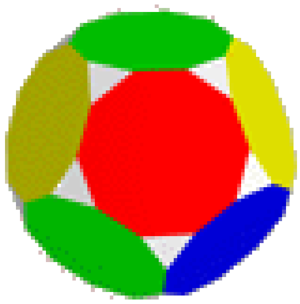


ICOSIDODECAEDRO **ICOSAEDRO TRUNCADO**





GRAN ROMBICUBOCTAEDRO **GRAN ROMBICOSIDODECAEDRO**



DODECAEDRO TRUNCADO