OPOSICIONES MADRID 2014

Un avión en vuelo estable está sometido a una fuerza de rozamiento con el aire, F, que depende de su velocidad, v, según:

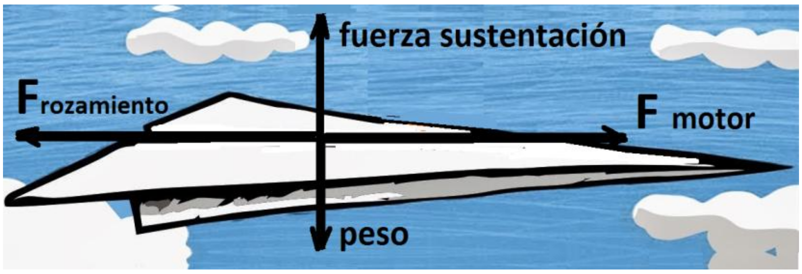
$$\boldsymbol{F = A \cdot v^2 + \frac{B}{v^2}}$$

Siendo B/v^2 la componente de arrastre que frena el avance y $A \cdot v^2$ la componente de sustentación. Determine, para una cantidad de combustible dada y velocidad de crucero constante:

a) El valor de la velocidad, en km/h, que maximiza el tiempo de vuelo.

b) El valor de la velocidad, en km/h, que maximiza el alcance del vuelo.

DATOS: $A = 0'3$ N·s²/m² ; $B = 350000$ N·m²/s²



- Supondremos que la masa del combustible es mucho menor que la masa propia del avión y toda su carga. Entonces la masa del avión es constante durante el vuelo.
- La energía del combustible es para realizar el trabajo del vuelo. El trabajo es invariable.

$$\Delta E = W = F \cdot \Delta x \qquad además \quad \Delta x = v \cdot \Delta t$$

b) Si queremos que el alcance sea máximo debemos hacer mínima la fuerza del motor, que coincidirá exactamente con la fuerza de rozamiento para mantener la velocidad constante.

$$F_{min} \Rightarrow \frac{dF}{dv} = 0$$

$$\frac{dF}{dv} = \frac{d}{dv}\left(Av^2 + \frac{B}{v^2}\right) = 2Av - \frac{2B}{v^3} = 0$$

$$v = \left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{350000}{0'3}\right)^{\frac{1}{4}} = 32'9\frac{m}{s} \cdot \frac{1\,Km}{1000\,m} \cdot \frac{3600\,s}{1\,h} = 118'3\frac{Km}{h}$$

a.1) Si queremos que el tiempo sea máximo deberemos utilizar la mínima potencia de los motores, pues el trabajo es invariable:

$$P = \frac{W}{\Delta t} \Rightarrow P = \frac{W}{\Delta t} = \frac{F \cdot \Delta x}{\Delta t} = F \cdot v = \left(A \cdot v^2 + \frac{B}{v^2}\right) \cdot v = A \cdot v^3 + \frac{B}{v}$$

$$P_{min} \Rightarrow \frac{dP}{dv} = 0$$

$$\frac{dP}{dv} = \frac{d}{dv}\left(A \cdot v^3 + \frac{B}{v}\right) = 3Av^2 - \frac{B}{v^2} = 0$$

$$v = \left(\frac{B}{3A}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{350000}{3 \cdot 0'3}\right)^{\frac{1}{4}} = 24'97\frac{m}{s} = 89'9\frac{Km}{h}$$

a.2)

$$W = F \cdot \Delta x = F \cdot v\Delta t = \left(A \cdot v^3 + \frac{B}{v}\right) \cdot \Delta t$$

Para que Δt sea máximo la función $A \cdot v^3 + \frac{B}{v}$ ha de hacerse mínima.

AMPLIACIÓN:

1.- Podemos hallar el alcance máximo con estas condiciones:

Primero hallaremos la fuerza que debe realizar el motor para que $\Delta x = máximo$

En ese caso:

$$v = \left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{1}{4}}$$

Y la fuerza F :

$$F = A \cdot v^2 + \frac{B}{v^2} = A \cdot \left[\left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{1}{4}}\right]^2 + \frac{B}{\left[\left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{1}{4}}\right]^2} = 2\sqrt{A \cdot B}$$

$$\Delta E = W = F \cdot \Delta x \implies \Delta x = \frac{W}{F} = \frac{\Delta E}{2\sqrt{A \cdot B}}$$

Es la máxima distancia que se puede recorrer con una cantidad de combustible dada (que proporcionará una energía ΔE) y una velocidad de crucero constante.

El tiempo necesario para realizar este vuelo es:

$$\Delta x_{máximo} = v \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta x}{v} = \frac{\frac{\Delta E}{2\sqrt{A \cdot B}}}{\left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{1}{4}}} = \frac{\Delta E}{2 \cdot \sqrt{A} \cdot \sqrt[4]{B^5}}$$

2.- Y de forma análoga, podemos hallar el tiempo máximo que puede estar el avión en el aire:

Cuando $v = \left(\frac{B}{3A}\right)^{\frac{1}{4}}$ el Δt es máximo, entonces:

$$F = A \cdot v^2 + \frac{B}{v^2} = A \cdot \left[\left(\frac{B}{3A}\right)^{\frac{1}{4}}\right]^2 + \frac{B}{\left[\left(\frac{B}{3A}\right)^{\frac{1}{4}}\right]^2} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}\right) \cdot \sqrt{A \cdot B} = 2'3 \cdot \sqrt{A \cdot B}$$

$$\Delta x_2 = \frac{W}{F} = \frac{\Delta E}{2'3 \cdot \sqrt{A \cdot B}}$$

$$\Delta t_{máximo} = \frac{\Delta x}{v} = \frac{0'57 \cdot \Delta E}{\sqrt{A} \cdot \sqrt[4]{B^5}}$$

Observamos que:

$$\Delta x_{máximo} > \Delta x_2$$

Y:

$$\Delta t_{máximo} > \Delta t_1$$

Es decir, estar más tiempo volando no garantiza llegar más lejos.