



TEMA 38:

**TANGENCIAS Y ENLACES.
APLICACIONES.**



1. INTRODUCCIÓN.

2. POSICIÓN RELATIVA DE UNA RECTA Y UNA CIRCUNFERENCIA.

3. TANGENCIAS ENTRE RECTAS Y CIRCUNFERENCIAS.

3.1. RECTAS TANGENTES A CURVAS DADAS.

3.2. CURVAS TANGENTES A RECTAS DADAS.

3.3. CURVAS TANGENTES A CIRCUNFERENCIAS Y RECTAS DADAS.

3.4. INSCRIPCIÓN DE CIRCUNFERENCIAS EN POLÍGONOS REGULARES

4. ENLACES DE RECTAS Y CURVAS.

5. POSICIONES RELATIVAS DE DOS CIRCUNFERENCIAS.

6. TANGENCIAS ENTRE CIRCUNFERENCIAS.

7. BIBLIOGRAFÍA.

8. EJERCICIOS PROPUESTOS.



TEMA 38. TANGENCIAS Y ENLACES. APLICACIONES.

1. INTRODUCCIÓN.

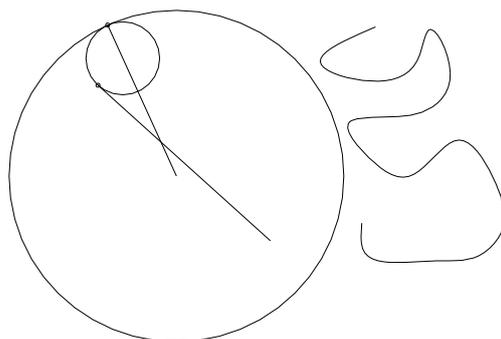
Se dice que dos figuras son tangentes cuando sin cortarse, solo tienen un punto en común, al que llamamos punto de tangencia, esta relación se puede establecer entre una curva y una recta o entre dos curvas. Enlace es la unión armónica de dos o más líneas, ya sean curvas o rectas, de modo que parezcan una línea continua, para que el enlace sea perfecto es necesario que se verifique la continuidad de la curva en el punto de enlace, es decir que se evite un cambio brusco de dirección.

En la práctica, el problema fundamental que se plantea, estriba en la exacta determinación del centro de la circunferencia tangente o del punto de tangencia, operación por la cual son necesarios un considerable número de pasos intermedios que resolveremos con los correspondientes trazados geométricos.

En todo enlace se cumplirá uno de estos dos teoremas:

A) TANGENCIA RECTA/CURVA. El radio que va al punto de tangencia de una recta con una circunferencia es perpendicular a la recta en dicho punto.

B) TANGENCIA CURVA/CURVA. Dos circunferencias tangentes mantienen sus centros y el punto de tangencia en una misma recta y se encuentran por tanto alineados. Nuestra gran ventaja será que sobre esa recta podremos controlar las distancias entre los centros de las mismas circunferencias que intervengan en el enlace.





2- POSICIÓN RELATIVA DE UNA RECTA Y UNA CIRCUNFERENCIA.

Posición relativa de una recta y una circunferencia.

Una recta y una circunferencia de un plano pueden ocupar estas tres posiciones que mutuamente se excluyen:

- a. *Exterior*, cuando su distancia, al centro es mayor que al radio de la circunferencia, no tiene ningún punto común,
- b. *Secante*, cuando la distancia del centro a la recta es menor que el radio, tiene dos puntos comunes o corta a la circunferencia en dos puntos,
- c. *Tangente*, cuando la distancia de la recta al centro de la circunferencia es igual al radio, tienen un punto común, se tocan en un único punto llamado punto de tangencia.

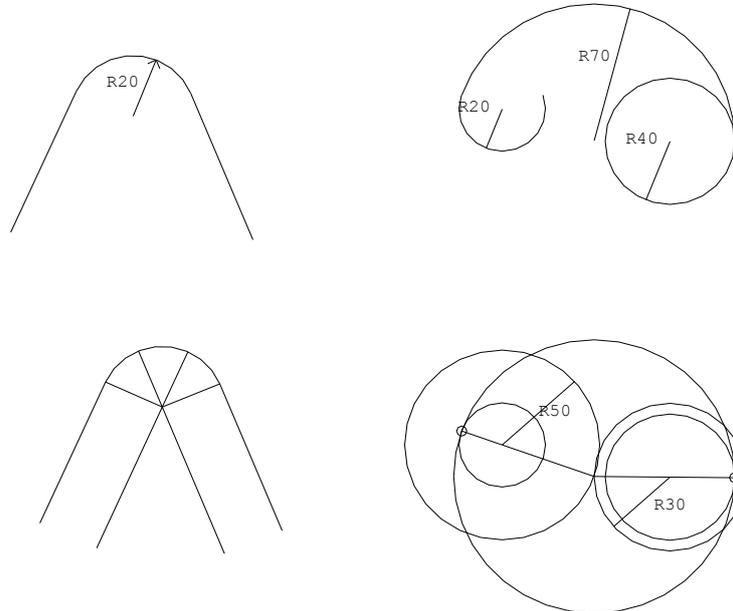
Para que una recta sea tangente a una circunferencia, es necesario y suficiente que sea perpendicular a un radio en su extremo.

3- TANGENCIAS ENTRE RECTAS Y CIRCUNFERENCIAS.

Método por construcciones fundamentales.

Los dos teoremas vistos en el apartado anterior son la clave para deducir de un modo lógico gran parte de los problemas de tangencias, excepto aquellos que provienen de las transformaciones geométricas.

El proceso es sencillo, se trata de deducir gráficamente sobre el enunciado del ejercicio donde se halla el punto de tangencia y con ello cuáles son los procesos gráficos a aplicar. Lo veremos en los ejemplos a través del dibujo.



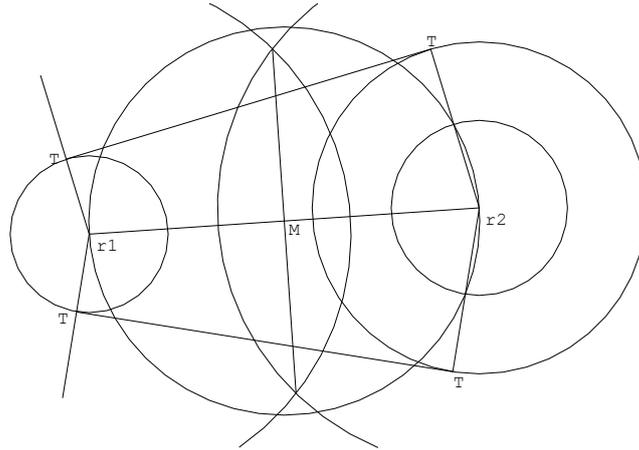
En el caso de la tangencia curva/recta el proceso lógico siempre nos llevará a trazar una paralela a la recta a la distancia del radio de la misma circunferencia tangente. Y en el caso de la tangencia entre curvas deberé deducir donde está el punto de tangencia para, en función de las circunferencias que conozca que distancia existe entre éstas y la futura tangente, y con ello poder trazar los pertinentes arcos.

RECTAS TANGENTES EXTERIORES A DOS CIRCUNFERENCIAS DADAS:

- DATOS: r_1 radio de la circunferencia pequeña y r_2 radio de la circunferencia grande
- trazo una circunferencia auxiliar con centro en r_2 , dicha circunferencia tiene un radio de valor $r_2 - r_1$
- por otro lado uno mediante una recta los centros de las circunferencias y trazo su mediatriz, obtengo M
- desde el punto donde corta mediatriz y recta, es decir, desde el punto medio de la recta que une los centros, trazo una circunferencia de radio valor M-A
- ese arco corta a mi circunferencia auxiliar definitivamente en dos puntos, que uno por mediante una recta con el centro de mi circunferencia auxiliar



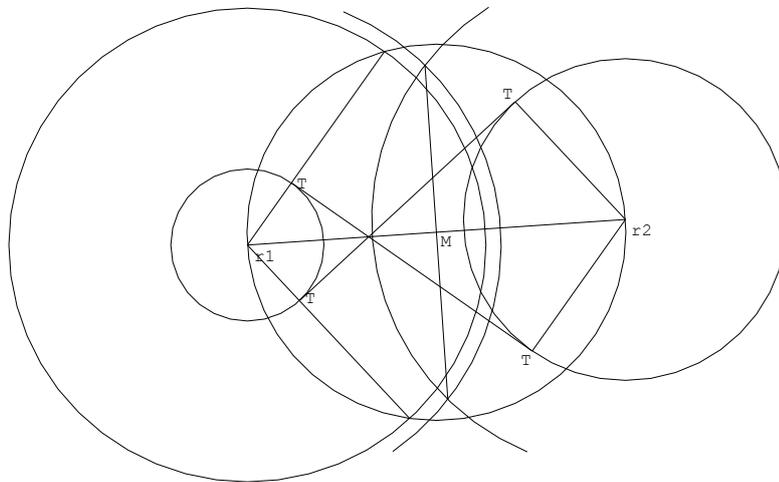
- esas son las direcciones que me dan los puntos de tangencia
- en r_2 alongo esas rectas hasta que corten a mi circunferencia inicial r_2 , ya tengo los puntos de tangencia
- trazo paralelas a dichas direcciones por el centro de r_1 , obteniendo así los puntos de tangencia de r_1



RECTAS TANGENTES INTERIORES A DOS CIRCUNFERENCIAS DADAS:

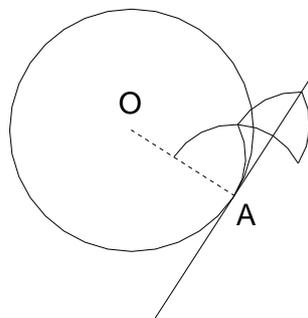
DATOS: r_1 radio de la circunferencia pequeña y r_2 radio de la circunferencia grande

- trazo una circunferencia auxiliar con centro en r_2 , dicha circunferencia tiene un radio de valor r_2+r_1
- por otro lado uno mediante una recta los centros de las circunferencias y trazo su mediatriz, obtengo M
- desde el punto donde corta mediatriz y recta, es decir, desde el punto medio de la recta que une los centros, trazo una circunferencia de radio valor M-A
- ese arco corta a mi circunferencia auxiliar definitivamente en dos puntos, que uno por mediante una recta con el centro de mi circunferencia auxiliar
- esas son las direcciones que me dan los puntos de tangencia
- en r_1 esas rectas cortan a mi circunferencia inicial r_1 , ya tengo los puntos de tangencia
- trazo paralelas a dichas direcciones por el centro de r_1 , obteniendo así los puntos de tangencia de r_2



3.1- Rectas tangentes a curvas dadas.

Trazar una recta tangente a una circunferencia en un punto dado A:



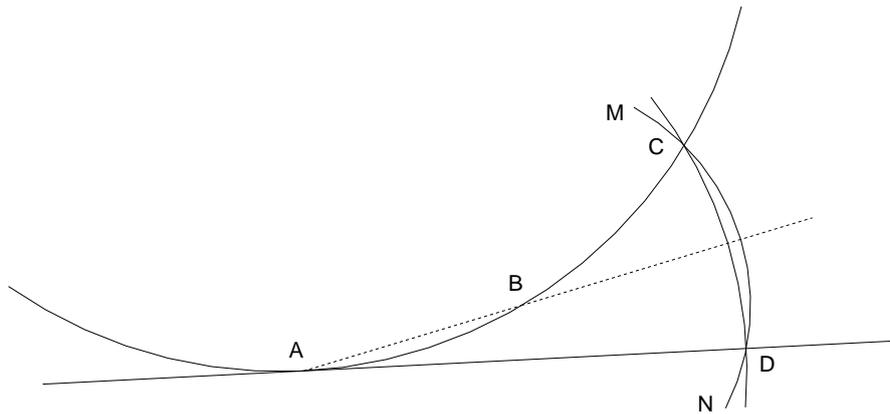
La tangente será la perpendicular trazada en el extremo A del radio OA.

Trazar una recta tangente a un arco en un punto dado A (o a una circunferencia sin hacer uso del centro):

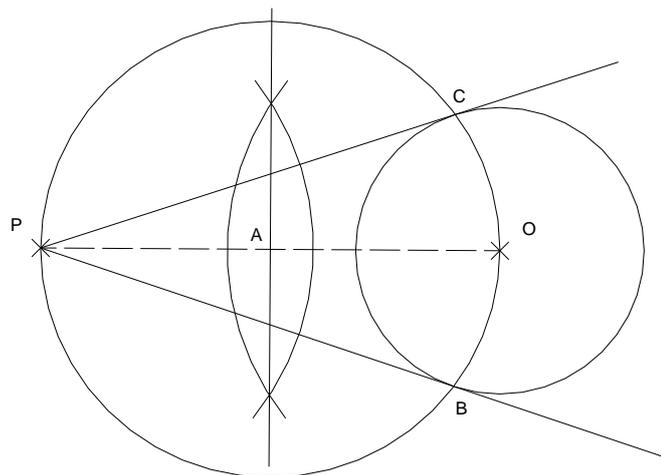
Desde un punto cualquiera, B, del arco, o de la circunferencia, se traza con radio BA el arco MN que corta a la circunferencia en C. Desde A y con radio AC se traza un arco que corta al MN en D. Uniendo D con A se tiene la tangente, pedida.



Con centro en el punto dado A de la circunferencia y con radio suficiente se traza el arco EF, que cortará a la circunferencia en B y C, La paralela a la recta BC que pase por el punto A es la tangente buscada.



Trazar, desde un punto dado P, dos rectas tg a una circunferencia:

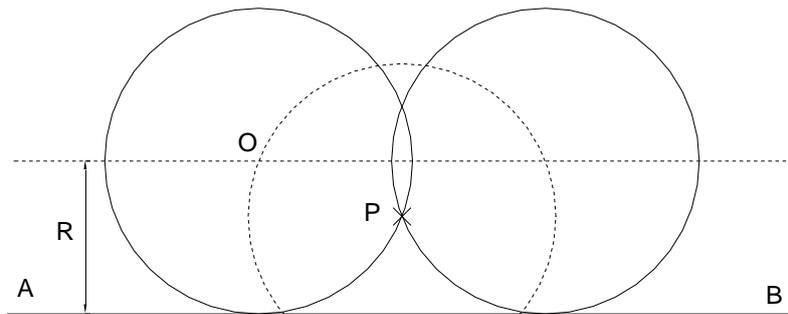


Se une O con P. Desde el punto medio A de OP se traza una circunferencia de diámetro OP, que corta a la circunferencia dada en B y C, puntos de tangencia. Se trazan PB y PC, que son las tangentes pedidas.



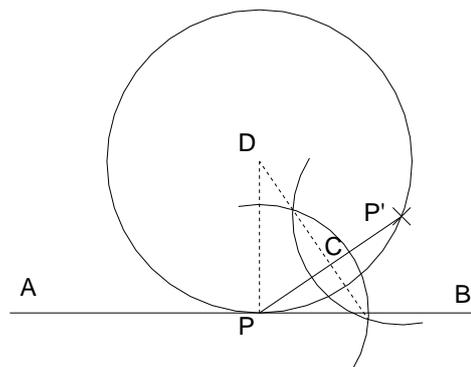
3.2- Curvas tangentes a rectas dadas.

Dado el radio R, trazar una circunferencia tg a una recta AB, pasando por un punto P



A una distancia R se traza una paralela a la recta AB que interceptará en el punto O a la circunferencia auxiliar de radio R trazada con centro en P. O es el centro de la circunferencia, de radio R, tangente pedida,

Trazar una circunferencia tangente a una recta AB en un punto de ella P, pasando por un punto dado P':

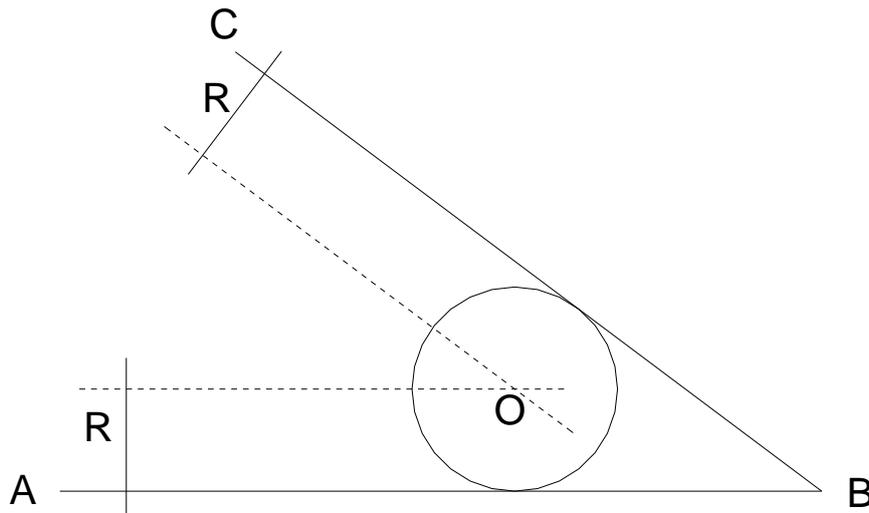


Se unen P y P', levantando en su punto medio, C, una perpendicular. En el punto P se levanta otra perpendicular que interceptará a la primera en un punto D, centro de la circunferencia tangente pedida.



Dado el radio R , trazar una circunferencia tangente a dos rectas dadas AB y BC ;

La intersección en O de dos paralelas trazadas a una distancia R a los lados AB y BC , dará el centro de la circunferencia tangente buscada.



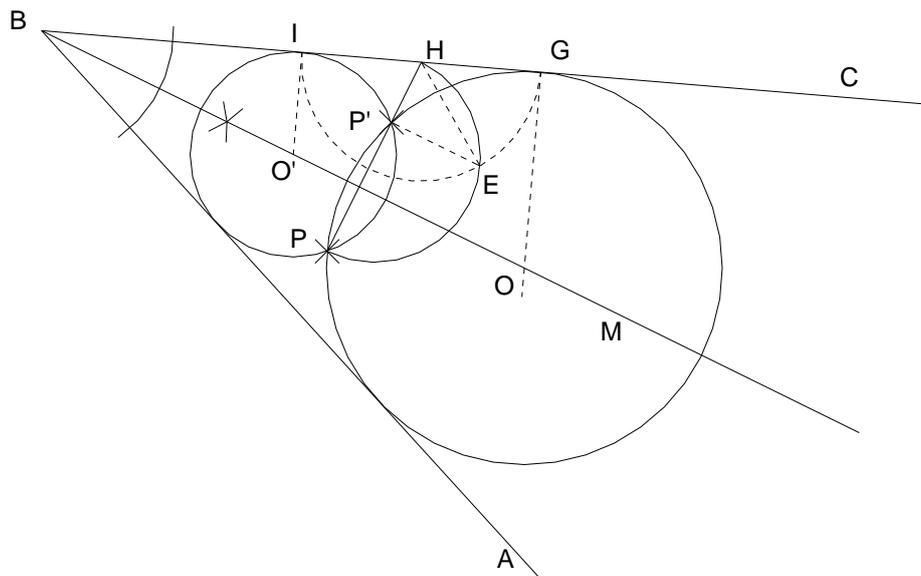
Trazar circunferencias tangentes a dos rectas dadas, SB y BC , que pasen por un punto P :

Se traza la bisectriz BM del ángulo formado por las rectas AB y BC . Respecto a ella, se traza el punto P^* , simétrico del P , prolongando la recta de unión PP^* hasta H . Se construye la semicircunferencia HP . Se levanta una perpendicular por P' a HP , hasta E , EH será media proporcional entre HP y HP' . Se traslada EH hasta G e I en la recta BC . Se levantan las perpendiculares OG y $O'I$ a la recta BC que dan los puntos O y O' , centros de las circunferencias tangentes pedidas.

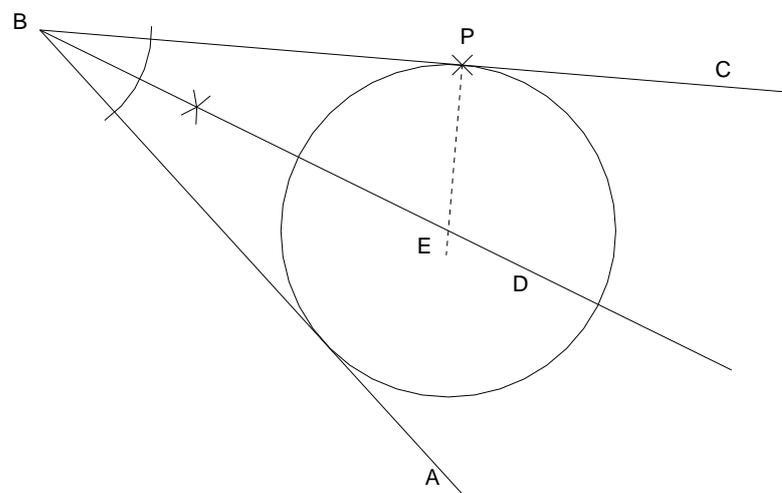
Se traza la bisectriz BM del ángulo formado por las rectas AB y BC , trazándose también la recta BP . Por un punto cualquiera D , de la bisectriz, se baja una perpendicular, DE , a la recta BB y con radio DE se traza un arco que corta a la convergente BP en los



puntos G y F, los que se unen con D. Por P se pasan paralelas a las rectas GD y DF que dan sobre la bisectriz los puntos O y O*, centros de las circunferencias tangentes posibles.

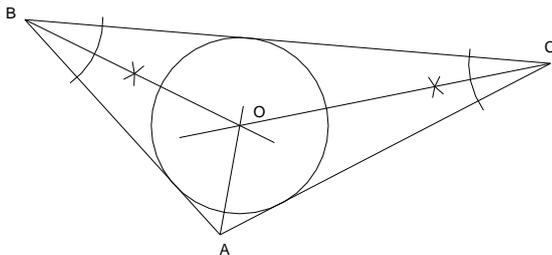


Trazar una circunferencia tangente a los lados de un ángulo ABC, pasando por el punto P de uno de ellos:





Se traza la bisectriz BD del ángulo ABC. Se levanta una perpendicular a BC en el punto P, que intercepta en E a la bisectriz. El punto E es el centro de la circunferencia tangente pedida.

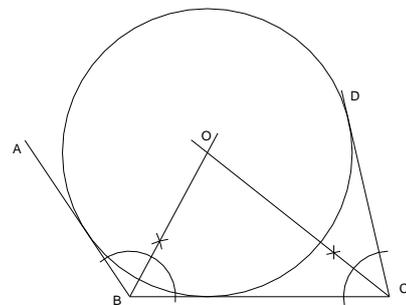


Trazar una circunferencia inscrita en un triángulo:

Se trazan las bisectrices de los tres ángulos del triángulo. El punto O de encuentro será el centro de la circunferencia pedida.

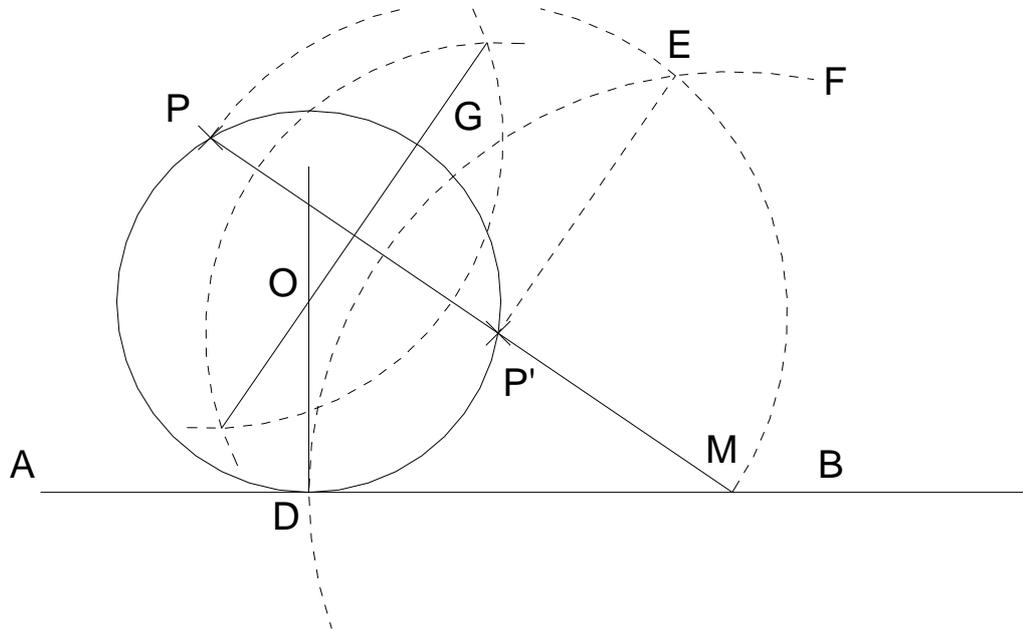
Trazar una circunferencia tangente a tres rectas formando línea poligonal:

El punto de intersección, O, de las bisectrices de los ángulos ABC y BCD será el centro de la circunferencia buscada.



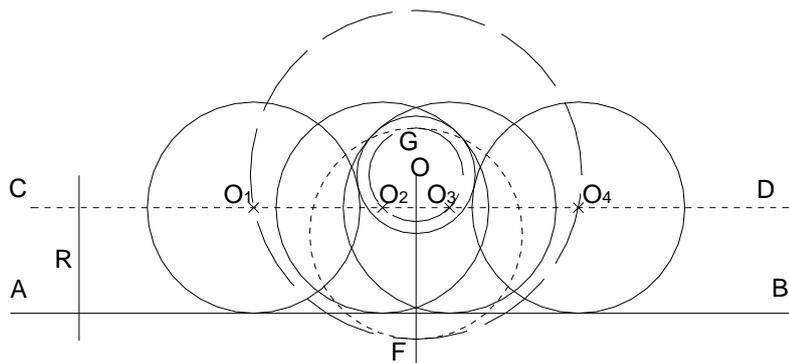
Trazar una circunferencia tangente a una recta dada AB y que pase por dos puntos P y P':

Se unen P y P' por una recta prolongada hasta si punto M de la recta dada AB. Sobre PM como diámetro se traza una semicircunferencia. Por el punto P* se levanta una perpendicular que corta a la semicircunferencia en E. Se lleva la distancia EM sobre la recta AB desde M hasta D. Se levanta una perpendicular a AB en el punto D que determina sobre la perpendicular levantada en el punto medio de la recta PP' el centro O de la circunferencia tangente pedida. EM o MD es media proporcional entre MP y MP*. Existe otra circunferencia tangente cuyo centro está en la prolongación de la perpendicular OG, en su intersección con la perpendicular levantada en el punto de contacto de la semicircunferencia DEF con la recta AB o su prolongación.



3-3- Curvas tangentes a circunferencias y rectas dadas.

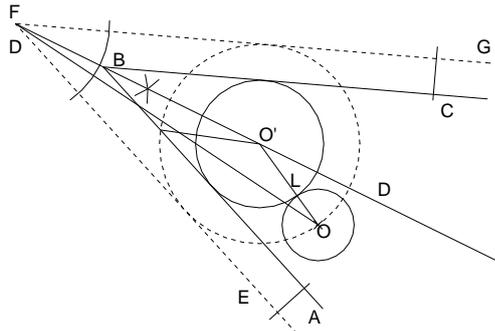
Dado el radio R, trazar circunferencias tangentes a una circunferencia 0 y a una recta AB:



A una distancia R de la recta AB se traza la paralela CD,, Se traza desde Q una perpendicular a AB que corta a la circunferencia dada en E, Desde E se lleva la distancia R hasta F y G, Se trazan circunferencias con centro en D y radio \overline{DF} y OG , que determinan sobre la paralela CD los puntos O_1, O_2, O_3, O_4 , centros de las circunferencias tangentes posibles. Los puntos J, K, H, I, L, M, N y P son los de tangencia.

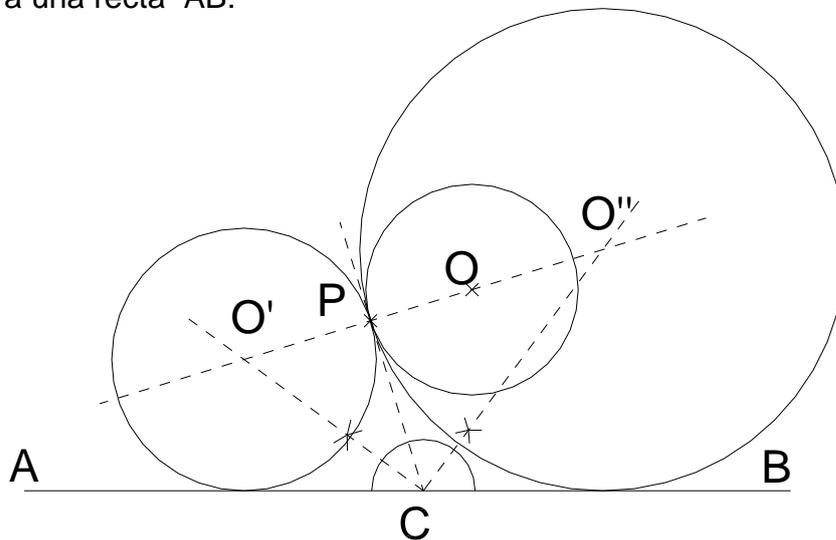


Trazar una circunferencia tangente a otra circunferencia y a dos rectas formando ángulo:



A distancia igual al radio de la circunferencia dada, se trazan paralelas DE y FG a las rectas dadas AB y BC. El problema queda reducido a trazar una circunferencia tangente a dos rectas DE y FG, pasando por el punto O. Una vez hallada la circunferencia tg auxiliar, se traza la buscada, concéntrica a la anterior y cuyo punto de tangencia con la dada es el punto L.

Trazar circunferencias tangentes a una circunferencia, en un punto P de ella, y a una recta AB:

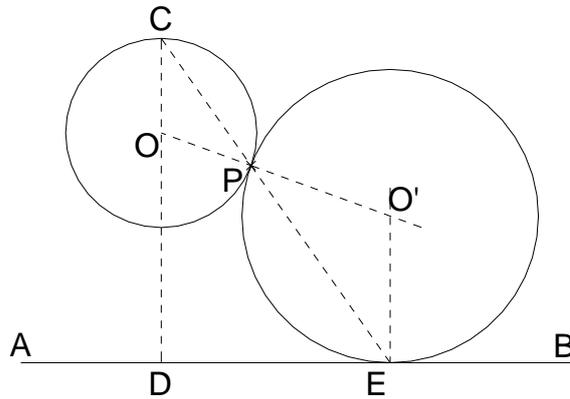


Se unen con una recta prolongada O y P. En el punto P se levanta una perpendicular a OP, que determina sobre AB el punto C. Se construyen las bisectrices de los ángulo PCA y PCB que en su intersección con la recta prolongada PO, dan los puntos O' y O'' centros de las circunferencias tangentes pedidas.

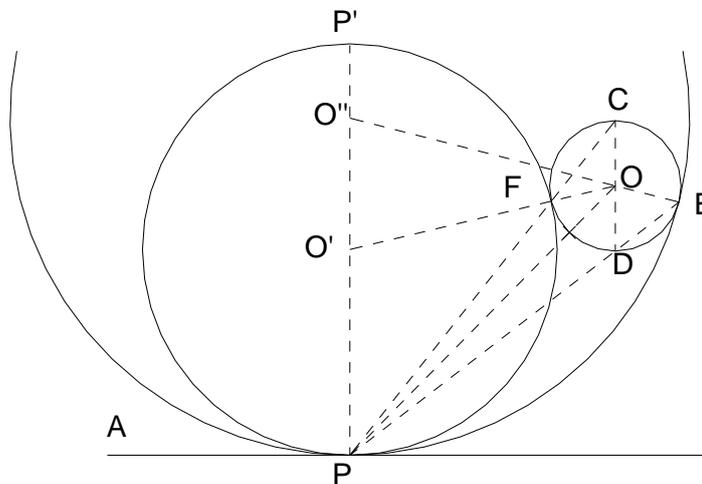


Trazar una circunferencia tg a otra dada O , en un punto P de ella, y a una recta AB .

Se traza la perpendicular CD a AB . Se unen con recta prolongada C y P que determina sobre AB el punto E de tangencia. Se unen O y P , cuya prolongación encuentra en O' a la perpendicular a AB construida en el punto E . O' es el centro de la circunferencia tangente pedida.



Trazar circunferencias tangentes a otra dada O , y a una recta AB , en un punto P de ella:

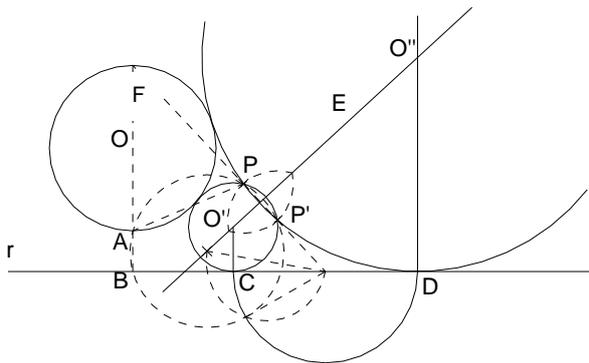


Se trazan las perpendiculares PP' y COD a la recta AB . Se unen P con C y P con D que determinan en la circunferencia dada, O , los puntos E y F , Trazando, las rectas prolongadas EO y FO determinan sobre la perpendicular PP' los puntos O' y O'' , centros de las circunferencias tangentes pedidas.

Trazar una circunferencia tangente a otra dada O , y a una recta AB , pasando por un punto P :



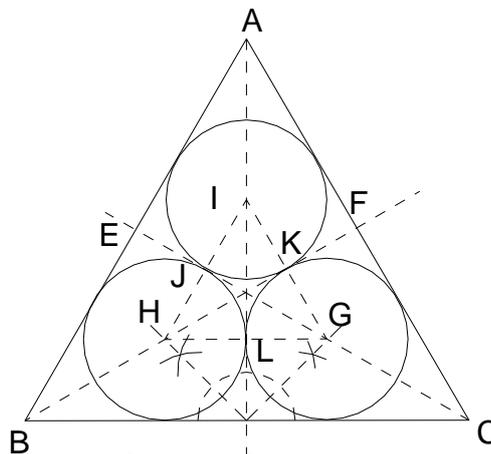
Se traza el diámetro perpendicular a la recta r y tomamos el punto F como centro de inversión. La circunferencia es inversa de la recta y el punto A lo es del B . El inverso de P es P' , que estará en la circunferencia que pasa por P , A y B y en línea recta con P y F . Las soluciones serán tangentes a la recta r y pasarán por P y P' , obteniendo dos soluciones.



Si tomamos como centro de inversión el otro extremo del diámetro, punto A se operaría de la misma forma y obtendríamos las otras dos soluciones.

3.4- Inscripción de circunferencias en polígonos regulares.

Inscribir en un triángulo equilátero tres circunferencias iguales tangentes entre sí:



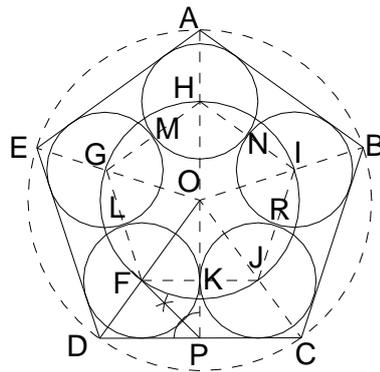
Se trazan las medianas del triángulo. Se construyen las bisectrices de los ángulos ADB , ADC y CEA , que determinan sobre las medianas los puntos H , G e I , centros de las circunferencias tangentes. Los puntos J , L y K son los de tangencia.

Inscribir en un pentágono regular cinco circunferencias iguales tangentes entre sí:

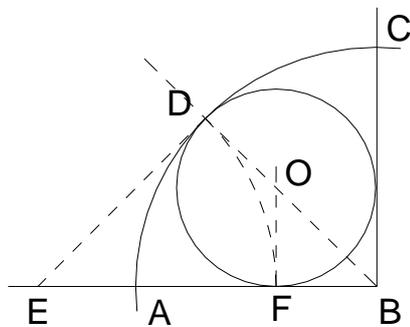


Se trazan los radios y una apotema, la OP , por ejemplo. Se construye la bisectriz del ángulo OPD , que corta en F al radio OD .

La circunferencia de radio OF determina sobre los radios del pentágono los puntos F, G, H, I y J , centros de las circunferencias tangentes pedidas. Los puntos M, N, R, K y L son los de tangencia.



Inscribir una circunferencia a un cuadrante de círculo:



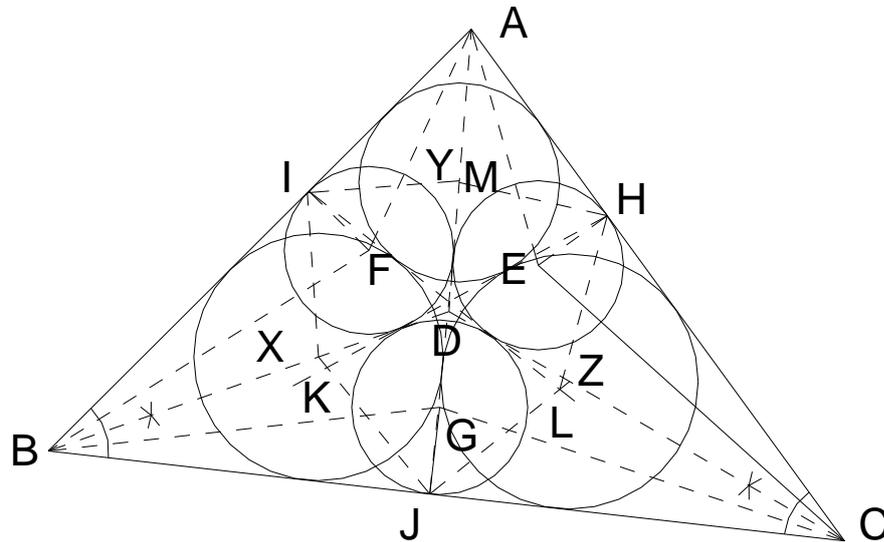
Se construye la bisectriz del ángulo ABC . Se construye el triángulo rectángulo isósceles BDE . Desde E , con radio ED , se describe el arco DF . Por F se levanta una perpendicular a AB que corta en O a la bisectriz DB . O será el centro de la circunferencia inscrita pedida.

Inscribir tres circunferencias, tangentes entre sí, a un triángulo escaleno (problema de Malfatti):

Se construyen las bisectrices de los ángulos del triángulo dado ABC , que se cortan en O , formando los triángulos ADC, CDB y BDA . En cada uno de estos triángulos se inscribe una circunferencia, cuyes centros son F, E y G , respectivamente. Se bajan las perpendiculares FI, EH y GJ . Se trazan las tangentes IL, HK , y JM . Se trazan las



bisectrices de los ángulos LIA, LIC, KHC, KHB, MJB, MJA, las que al cortarse determinan los puntos X, Y Z, centros de las circunferencias tangentes pedidas.



4- ENLACES DE RECTAS Y CURVAS.

Enlace es la unión armónica de dos o más líneas, ya sean curvas o rectas, de modo que parezcan una línea continua.

Para que un enlace sea perfecto es necesario que se verifique la continuidad de la curva en el punto de enlace, es decir, que se evite un cambio brusco de dirección.

Toda curva, en cada punto tiene su tangente, que puede definirse como una recta que une dos puntos infinitamente próximos a la misma curva; estos dos puntos, prácticamente coincidentes, constituyen el punto de contacto entre la tangente y la curva.

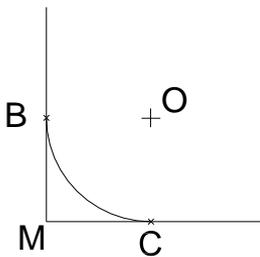
Para efectuar el enlace en forma correcta hay que realizar una serie de trazados tal como a continuación se indica:

1. Se determina el centro del arco o circunferencia, por medio de trazados geométricos apropiados.



2. Se determinan los puntos de tangencia, con objeto de saber donde ha de comenzar el enlace y donde ha de terminar.
3. Se traza el arco de enlace.

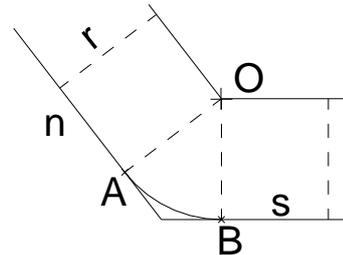
Unir dos rectas perpendiculares, mediante un arco de radio dado.



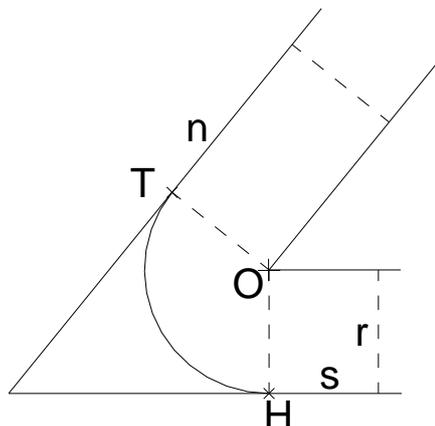
Se hace centro en B y en C, con abertura de compás igual a BM, que será igual a la magnitud del radio dado, se trazan dos arcos que se cortan en O. Con centro en O y la misma abertura de compás se dibuja el arco de enlace

Enlazar dos rectas que forman un ángulo mayor de 90 por medio de un arco de radio dado.

Se trazan dos paralelas a las rectas n y s, a la distancia r, estas paralelas se cortan en O, centro del arco de enlace. Desde O se trazan las perpendiculares OA y OB respectivamente a n y s, se determinan los puntos A y B de los que sale el arco de enlace. Con centro en O y radio r se traza el enlace pedido.



Unir dos rectas que forman un ángulo menor de 90 grados por medio de un arco de radio dado.

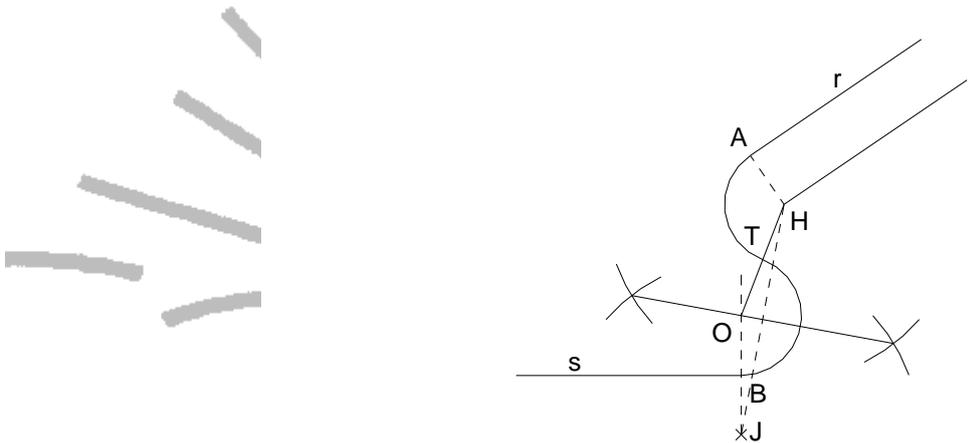


A La distancia r, se trazan paralelas a n y s, se cortan en O. Pasando por O, se levantan perpendiculares a n y a s, las cuáles producirán los puntos T y H de tangencia. Tomando por centro el punto O, y con radio r se traza el arco pedido,

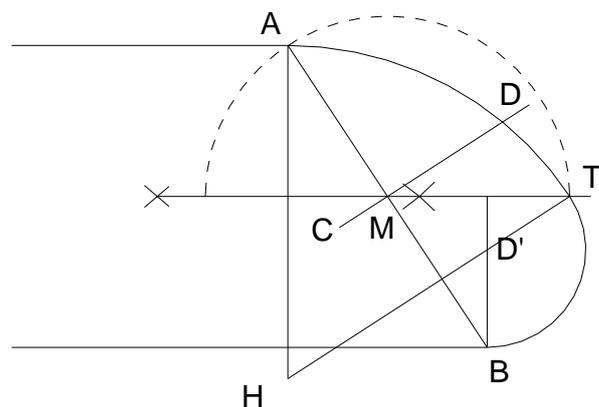


Enlazar dos rectas concurrentes r y s , con dos arcos de sentido contrario, conociendo los puntos de tangencia con las rectas y el radio de uno de los arcos.

Pasando por A y por B , se levantan perpendiculares a las rectas dadas, a una distancia r , se trazan paralelas a las rectas, que cortaran a las perpendiculares en H y J . Se une H con J , se halla la mediatriz de esta recta y se determina el punto O por la intersección de la prolongación de JB con la mediatriz. Se une O con H , y haciendo centro en O con un radio OB , se describe un arco desde B hasta T . Haciendo centro en H , con radio AH , se describe un arco, desde A hasta T .



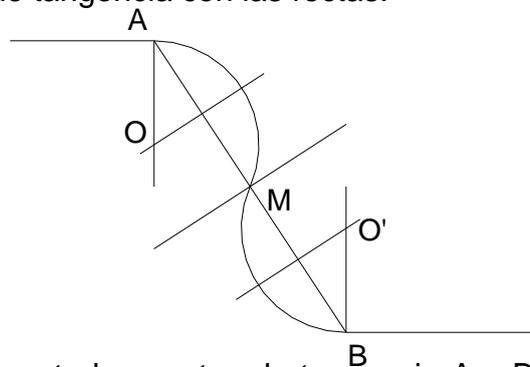
Unir dos rectas paralelas, por medio de dos arcos de distinto radio e igual sentido, conociendo los puntos de tangencia con las rectas.





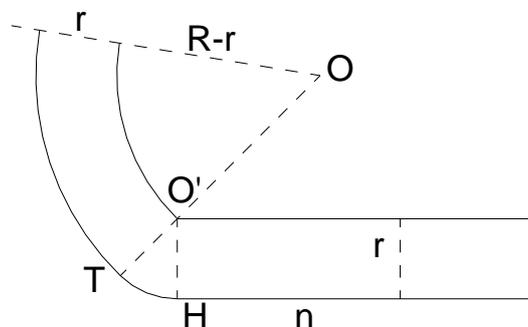
Por A y B se levantan perpendiculares a las rectas dadas. Se une A con B, se halla la mediatriz y se determina el punto medio M. Se determina la mediatriz de AH y se lleva la distancia AM, desde M hasta determinar N sobre la mediatriz de AH. Por N se traza una paralela a la mediatriz CD, resultando los puntos O y O' al cortar a las rectas AH y a la perpendicular por B.

Unir dos rectas paralelas con dos arcos de igual radio y sentido contrario, conociendo los puntos de tangencia con las rectas.



Uniremos con una recta los puntos de tangencia A y B. Trazaremos la mediatriz de AB obteniendo su punto medio M donde serán tangentes los arcos que tracemos. Hallamos la mediatriz de AM y de MB que cortarán a las perpendiculares levantada por A y B en los punto O y O', centros de los arcos pedidos.

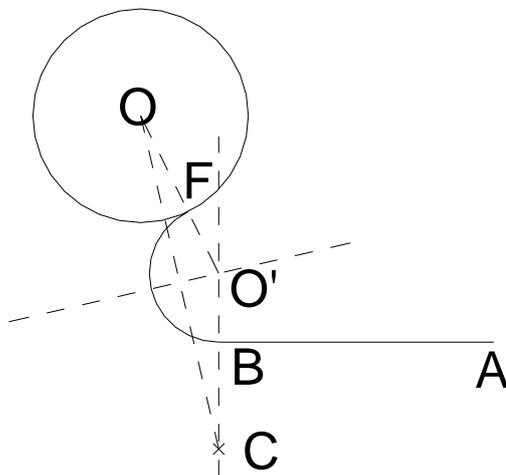
Dado un arco de circunferencia y una recta, enlazarlos mediante un arco del mismo sentido y de radio dado.





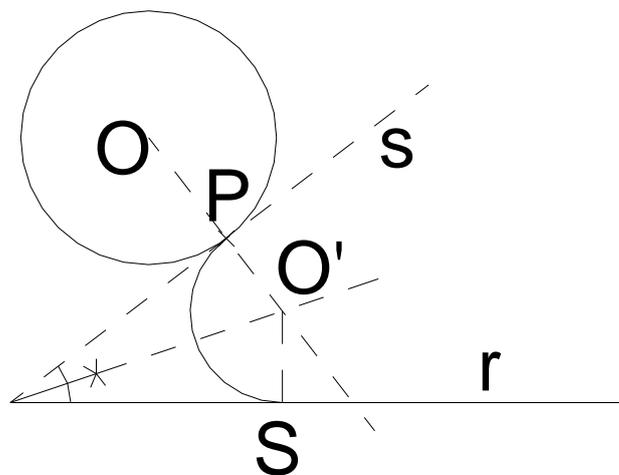
A una distancia r de la recta, se traza una paralela. Tomando como radio la diferencia entre el radio del arco dado y el radio pedido, $R-r$ y tomando como centro el del arco R , se traza un nuevo arco paralelo al anterior que cortará en O a la paralela trazada a la recta. Prolongando la recta OO' obtendremos el punto de tangencia T y bajando una perpendicular a n por O , nos dará el punto H

Enlazar una circunferencia con un segmento en el punto 3 del mismo.



Por B se traza la perp, a AB. Sobre ella se toma $BC=R$. Se une C con O y se traza su mediatriz. La mediatriz corta en O' a la prolongación de BC. Haciendo centro en O' y con radio $O'B$ se traza el arco de enlace. El punto de tangencia F se halla uniendo O con O'

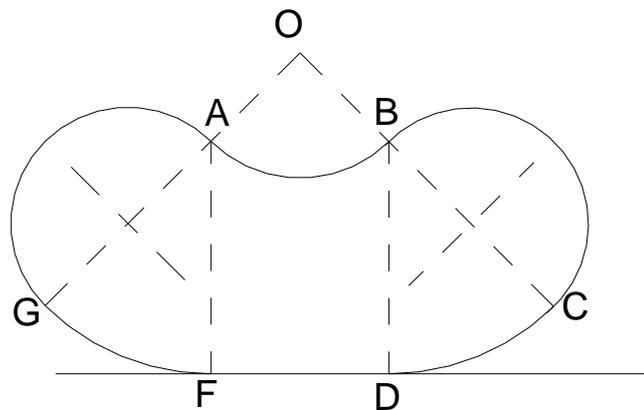
Enlazar en el punto P de la circunferencia, ésta con una recta.





Se traza el radio prolongado OP . Por P se traza la tangente t a la circunferencia que corta en c a la recta a . Se traza la bisectriz del ángulo Pea , cortará en O' a la prolongación de OP . La perpendicular a la recta a pasando por O' nos dará el punto S .

Trazar tangentes comunes a una recta y a una curva dadas A y FD .



Se trazan los radios OA y OB prolongados. Con centro en A y B se describen los arcos FG y DC . En los puntos medio de GA y BC están los centros de los arcos tangentes que cierran la figura.

5- POSICIONES RELATIVAS DE DOS CIRCUNFERENCIAS.

Dos circunferencias de un mismo plano puedan ser:

- Exteriores, cuando no tienen ningún punto en común, la distancia de los centros es mayor que la suma de sus radios.
- Concéntricas, cuando las dos circunferencias tienen el mismo centro.
- Secantes, cuando las circunferencias tienen dos puntos comunes, la distancia de centros es menor que la suma de sus radios.
- Tangentes, cuando tienen un punto común. El punto común se llama de tangencia. Pueden ser:
 - *Tangentes Exteriores*, considerando que en el punto de tangencia es posible trazar una recta tangente a las dos circunferencias en



cuestión, se observa que por ser esta recta perpendicular a cada uno de los respectivos radios se cumple que: Los radios que pasan por el punto de tangencia de dos circunferencias exteriores están en prolongación.

- *Tangentes Interiores*, en el punto de tangencia se puede trazar una recta tangente a ambas, se obtiene en consecuencia, que debiendo ser esta recta perpendicular a cada uno de estos radios, resulta que: Los radios que pasan por el punto de tangencia de dos circunferencias tangentes interiores están superpuestos,

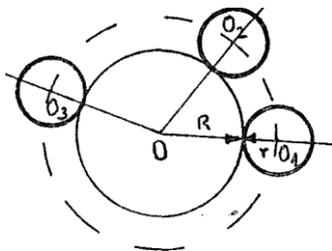
De lo dicho anteriormente se deducen las condiciones generales de tangencia entre dos circunferencias.

La recta que une los centros de las circunferencias tangentes (interiores o exteriores) pasa por el punto de tangencia.

Recíprocamente, las circunferencias tangentes a otra dada en un punto, T , de la misma tienen su centro sobre la recta que pasa por el centro de la dada y por el punto de tangencia, esta recta es pues, lugar geométrico de los centros de todas las posibles Circunferencias tangentes a la dada en aquel punto de tangencia.

6- TANGENCIAS ENTRE CIRCUNFERENCIAS.

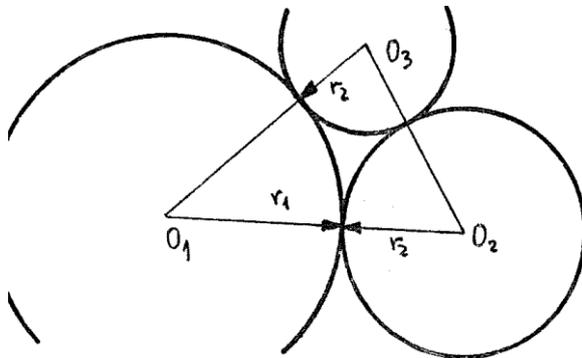
Circunferencias de radio dado tangentes exteriores a una circunferencia,



El lugar geométrico de los centros de las circunferencias de radio dado tangentes exteriores a una circunferencia concéntrica de aquella, cuyo radio es igual a la suma de los radios (de la circunferencia dato y del dado).

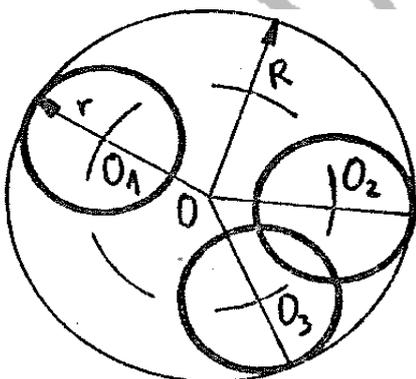


Dados tres radios, trazar tres circunferencias con ellos, tangentes entre si exteriormente.



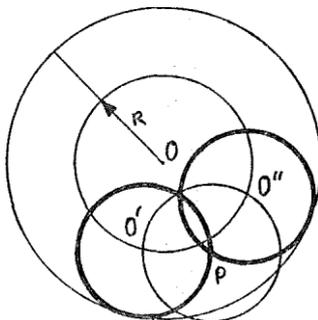
Situar dos de ellas determinando sus centros en los extremos del segmento suma de los radios r_1 y r_2 . Hallar, luego, el tercer centro en la intersección de los lugares geométricos descritos con radios iguales a la suma de r_1+r_3 y r_2+r_3 .

Circunferencias de radio dado tangentes interiores a otra circunferencia dada.



El lugar geométrico de los centros es una circunferencia concéntrica de la dada y cuyo radio es igual a la diferencia de los radios (de la circunferencia dato y del dado).

Trazar tangentes dado el radio R , a una circunferencia, pasando por un punto P interior:

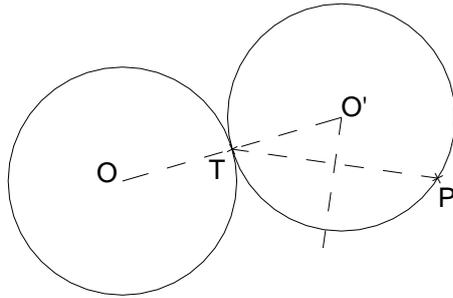


Desde P , con radio igual al dado, R , se traza una circunferencia auxiliar. Desde el centro O de la dada y con la diferencia de radios se traza otra circunferencia que corta a la auxiliar anterior en O' y O'' , centros de las dos circunferencias tangentes pedidas.

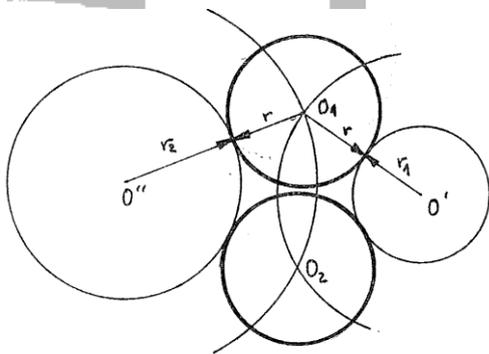
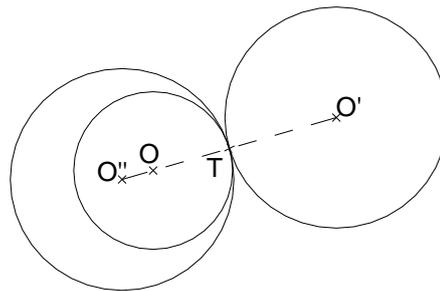
Circunferencia tangente a otra dada que pasa por un punto exterior dado, conocido el punto de tangencia T .



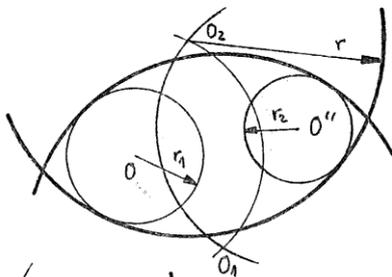
El centro se encontrará en la intersección de la recta OT que une el centro de la circunferencia dada con el punto de tangencia y la mediatriz de la recta que une los puntos P y T.



Circunferencias tangentes a una sola circunferencia, dado el punto de tangencia T y el radio de las soluciones.

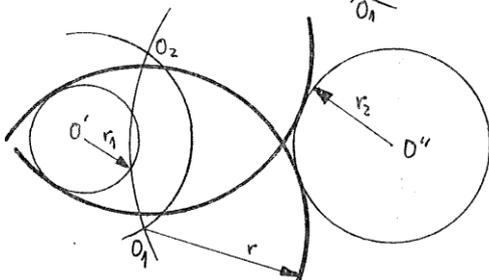


Se une el centro de la circunferencia dada O con el punto de tangencia T, a partir del punto T se lleva la distancia R sobre la recta OT determinándose los puntos O' y O'', centros de las circunferencias pedidas.



Circunferencias de radio dado tangentes a dos circunferencias.

Pueden presentarse los cuatro casos siguientes:



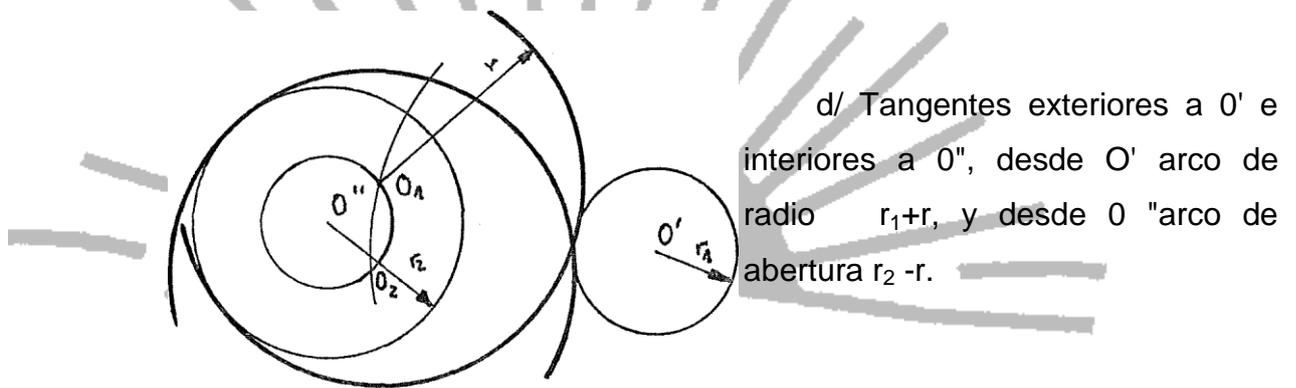
A / Tangentes exteriores a ambas se obtendrá por intersección del arco trazado desde O' con radio



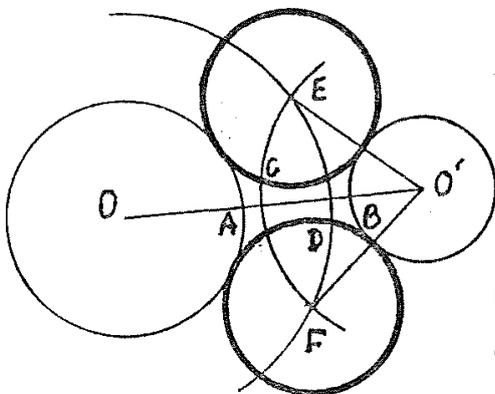
r_1+r , con el trazado desde O'' con radio r_2+r .

B / Tangentes interiores a ambas arcos desde O' con radio $r_1 - r$ y desde O'' con radio $r_2 - r$.

C / Tangentes interiores a O' y exteriores a O'' , desde O' arco de radio $r_1 - r$ y desde O'' arco con radio r_2+r .



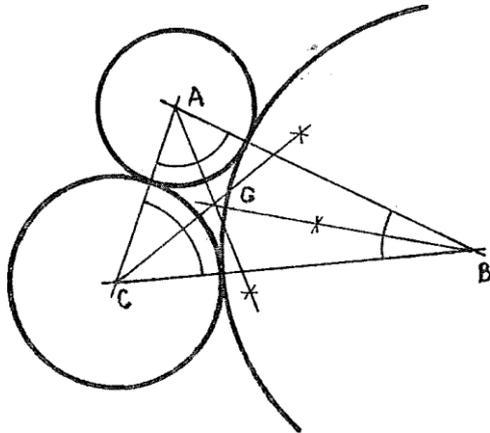
Dadas dos circunferencias, trazar circunferencias tangentes comunes, exteriores.



Se traza OO' que corta a las circunferencias dadas en A y B. Con longitud mayor que la mitad de la distancia AB, se sitúan los puntos D desde A, y C desde B. Con centro en O se describe un arco que pase por D, y con centro en O' otro que pase por C. Las intersecciones de los arcos determinan los puntos E y F, centros de las circunferencias tangentes pedidas.

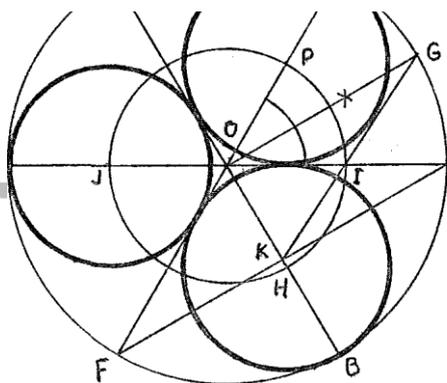


Dados los puntos A, B y C, trazar circunferencias tangentes entre si, con centro en dichos puntos.



Uniéndolo por rectas los puntos dados y trazando las bisectrices de sus ángulos, éstas se encontrarán en el punto G, desde el cual se bajarán perpendiculares a los lados AB, BC y CA, que darán los puntos de tangencia H, I y J.

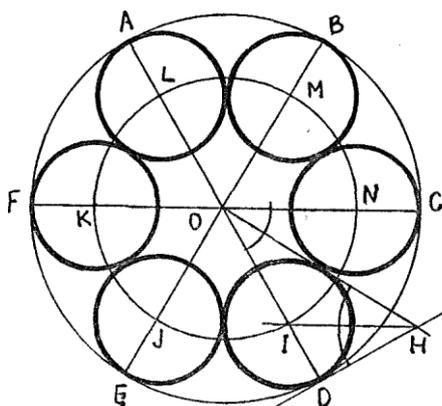
Inscribir en una circunferencia tres circunferencias iguales, tangentes entre sí.



Se trazan los tres diámetros AB, CE y DF que dividen a la circunferencia en 6 partes iguales. Se traza la bisectriz del ángulo DOE que corta a la circunferencia en G. Se une E con F, y desde G se traza la recta GH que corta al diámetro CE en I, La circunferencia de radio OI determina sobre los diámetros los puntos P, J y K, centros de las circunferencias tangentes buscadas.

Inscribir en una circunferencia dada, seis circ. iguales, tangentes entre si.

Se divide la circunferencia O en 6 partes iguales por los diámetros AD, BE y CF. En D se levanta DG, perpendicular a AD.



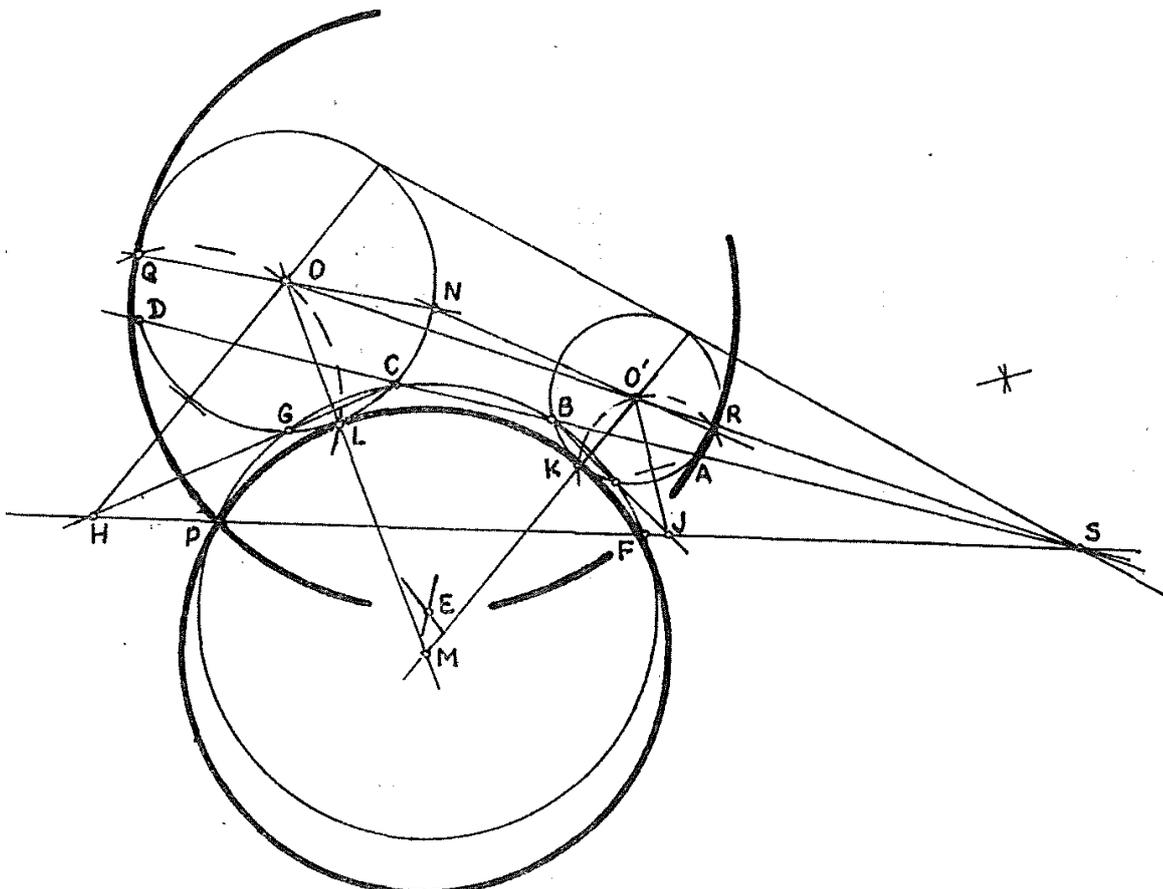
Se construye la bisectriz del ángulo COD, que corta en H a DG. Se construye la bisectriz del ángulo OHD, que corta en I a AD. Se describe la circunferencia de radio OI, que corta a



los diámetros en I, J, K, L, M y N, centros de las circunferencias tangentes pedidas.

Trazar una circunferencia tangente a otras dadas pasando por un punto P.

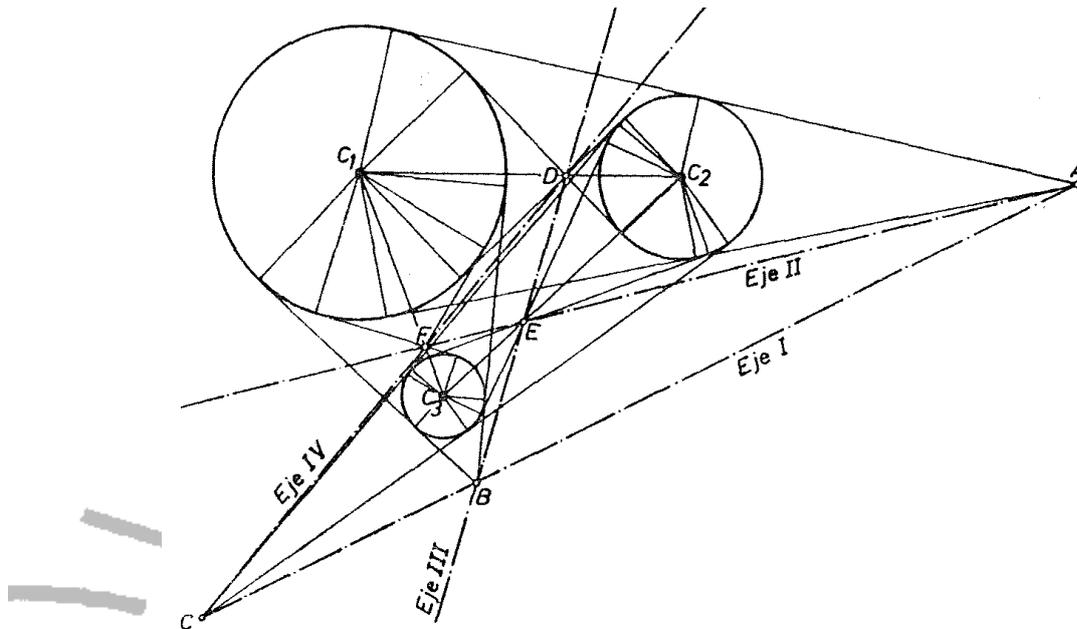
Se halla el centro de semejanza directa S, de las circunferencias O y O'. Se traza una secante SD que corta a las circunferencias dadas en los puntos A, B, C y D. Se traza desde S una recta prolongada que pase por P. Se describe una circunferencia con centro en E que pase por los puntos B, C y P, dando sobre la recta prolongada SP... el punto F y que corta a las circunferencias dadas, además de en B y C, en los puntos G e I. Se trazan las secantes CG y BI que determinan sobre la recta SP... los puntos H y J. Las rectas tangentes trazadas desde J a la circunferencia O y desde H a la circunferencia O' dan los puntos de tangencia Q y L, exteriores, y H y K, interiores. Uniéndolos los centros O y O' con estos puntos, interceptarán en la perpendicular trazada en el punto medio de PF los centros M y N de las circunferencias tangentes interior y exteriormente buscadas.





Circunferencias tangentes a otras tres. Problema de Apolonio. Método de Gergonne.

Este problema que a simple vista parece complicado, se resuelve con sencillez aplicando, según Gergonne, algunas propiedades geométricas:



. Los centros de homotecia positiva de las tres circunferencias, tomadas dos a dos, están en línea recta. Un centro de homotecia positiva y dos centros de homotecia negativa también están en línea recta. . El centro radical de las tres circunferencias es el centro de inversión de las circunferencias dadas y de las soluciones. Los puntos de tangencia de las soluciones con las circunferencias dadas estén en línea recta con el centro de inversión y con el polo respectivo de cada una de ellas respecto a un eje de homotecia. Este problema tiene ocho soluciones que se resuelven por parejas.

Se busca el centro radical de las tres circunferencias y los polos de cada una de ellas con respecto al Eje considerado. Uniendo el centro radical con cada uno de los polos se determinan sobre cada circunferencia dos puntos de tangencia, en total seis, que son las tangencias de las tres circunferencias solución. Para calcular los centros de estas, trazaremos líneas que pasen por cada punta de tangencia y el centro de su circunferencia.



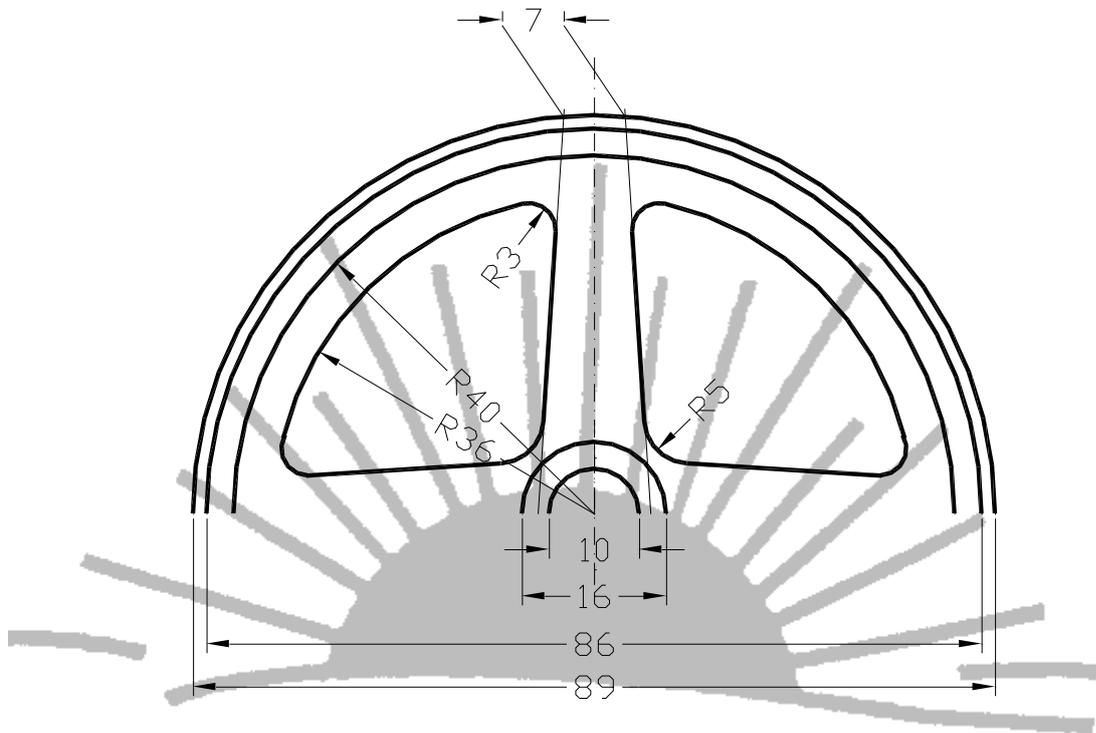
7- BIBLIOGRAFÍA.

- F. Javier Rodríguez de Abajo y Víctor Álvarez Bengoa. Ed. Donostiarra. *DIBUJO TÉCNICO*
- Arturo Replinger González. Ed. Anaya. *DIBUJO TÉCNICO*
- *Manual de normas UNE sobre dibujo*. Ed. Iranor . Madrid 1983
- Contenidos web de diferentes Áreas de Expresión Gráfica de diferentes universidades
- Jorge Senabre. Ed. Edelvives. *DIBUJO TÉCNICO*
- F. Izquierdo Asensi. *GEOMETRÍA DESCRIPTIVA*
- F. Javier Rodríguez y Alberto Revilla. *TRATADO DE PERSPECTIVA*
- J.J. Ferrer, C. Gómez y J.L. Higón C. *DIB. DE REPRESENTACIÓN*
- Corbella Barrios, David, *Elementos de normalización 3*. Madrid 1970
- Chevalier, M. *Dibujo industrial*. Ed. Montaner y Simón. Barcelona 1979.
- EDEBE, *Equipo técnico. Expresión gráfica*. Ed. Edebe. Madrid 1978.
- Frenen y Svenaen, S, *Dibujo técnico*. Ed, Gustavo Gili. Barcelona 19SS,
- Frünch y Vierck, S. *Dibujo de ingeniería*, Ed. Hispano Americana. Barcelona 1969.
- Hidalgo de Caviedes, Alejandro. *Dibujo técnico industrial*. LitoprInt. Madrid 1975.
- Larburo, Nicolás. *Técnicas del dibujo*, Ed, Paraninfo. Madrid 1973.
- Tekna, Gabinete. *Normas fundamentales de dibujo técnico industrial*.
- Ferrer, José Luis, *Sistema Diédrico I*, Ed. Guerra Ferrer. Valencia 1972.
- Larburo, Nicolás. *Técnicas del dibujo*. Ed. Paraninfo. Madrid 1973.

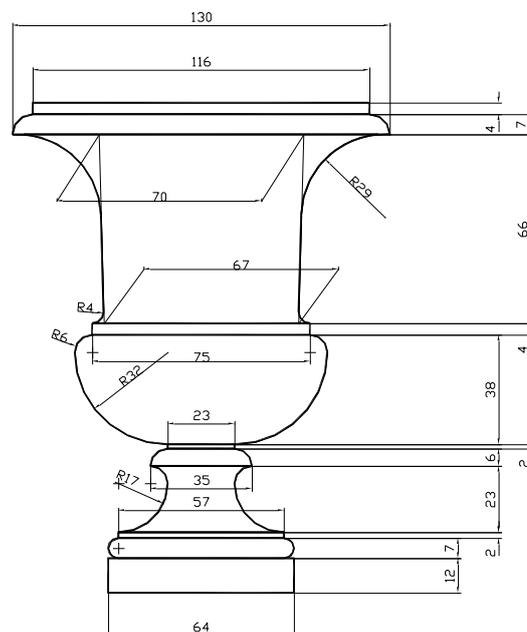


EJERCICIOS PROPUESTOS.

Resuelve el siguiente ejercicio de tangencias. Cotas en milímetros.

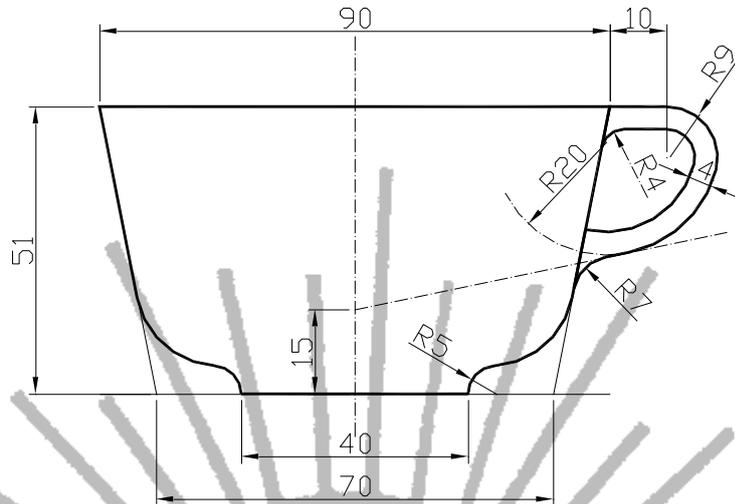


Resuelve el siguiente ejercicio de tangencias. Cotas en milímetros.

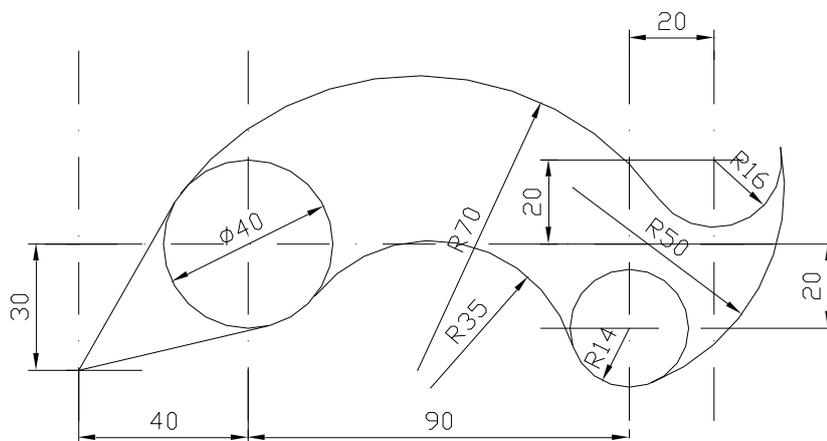




Resuelve el siguiente ejercicio de tangencias. Cotas en milímetros.

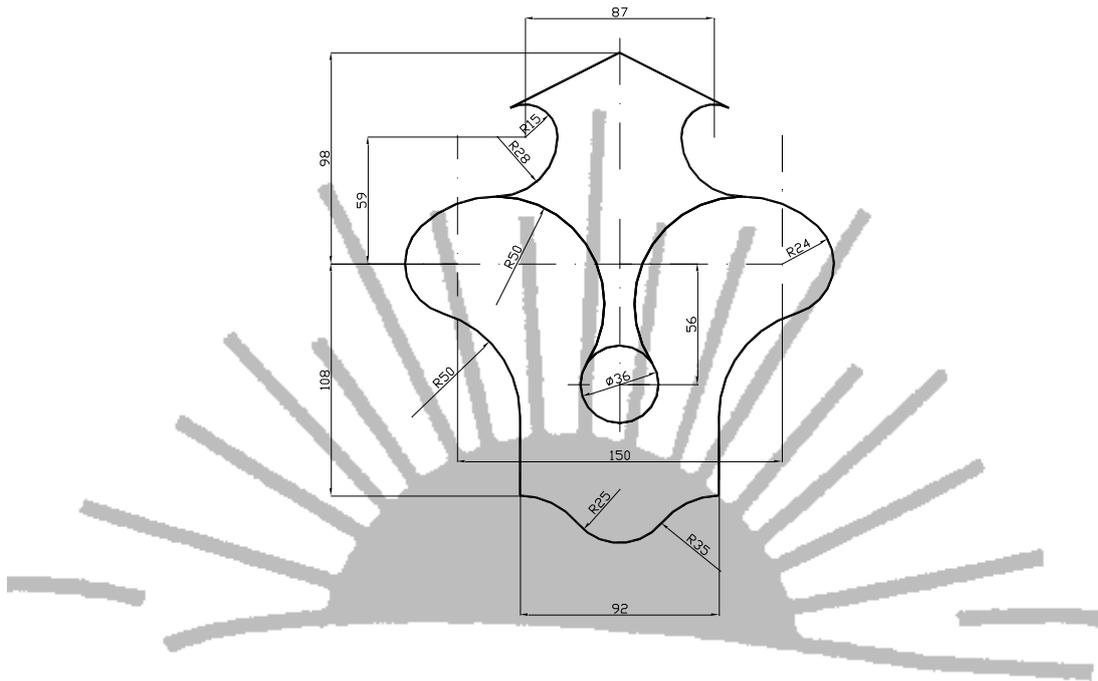


Resuelve el siguiente ejercicio de tangencias. Cotas en milímetros.

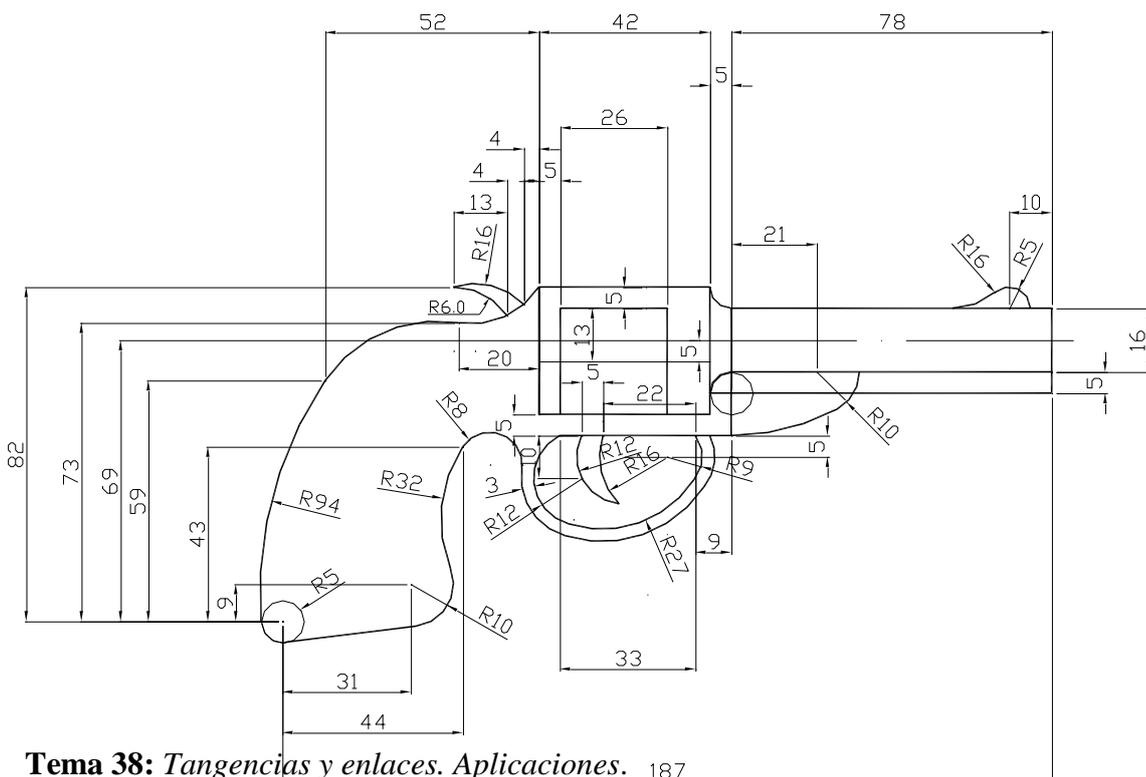




Resuelve el siguiente ejercicio de tangencias. Cotas en milímetros.

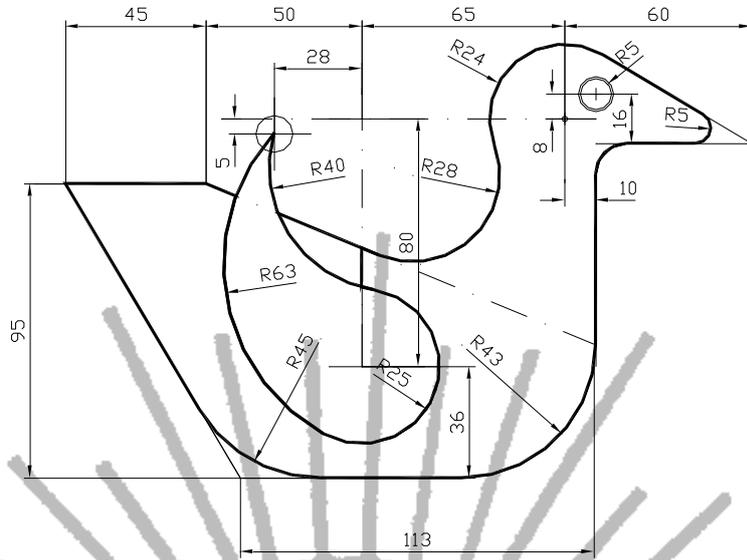


Resuelve el siguiente ejercicio de tangencias. Cotas en milímetros.

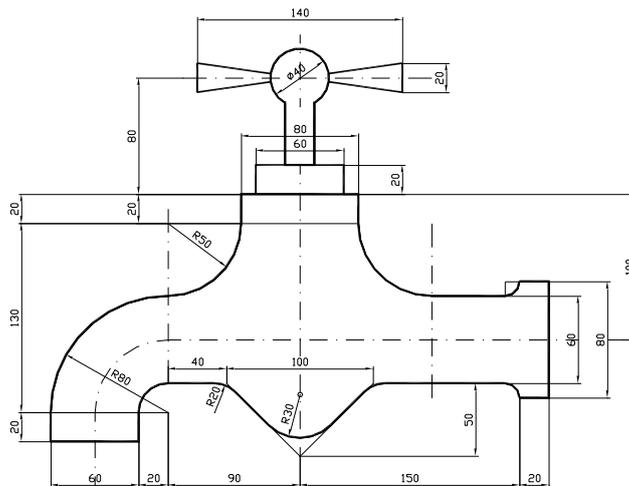




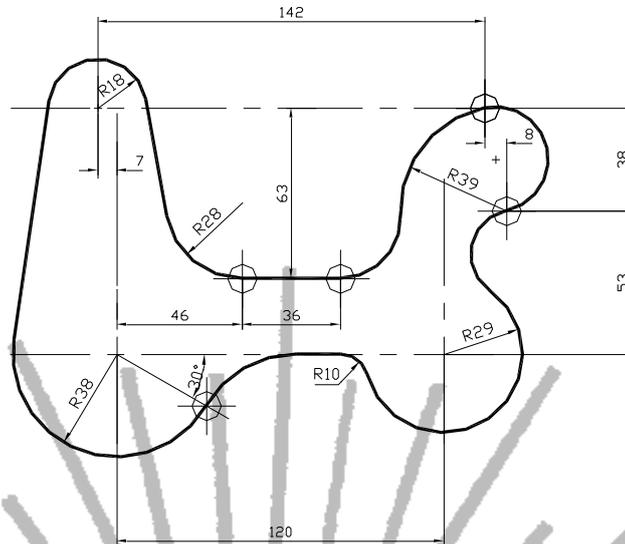
Resuelve el siguiente ejercicio de tangencias. Cotas en milímetros.



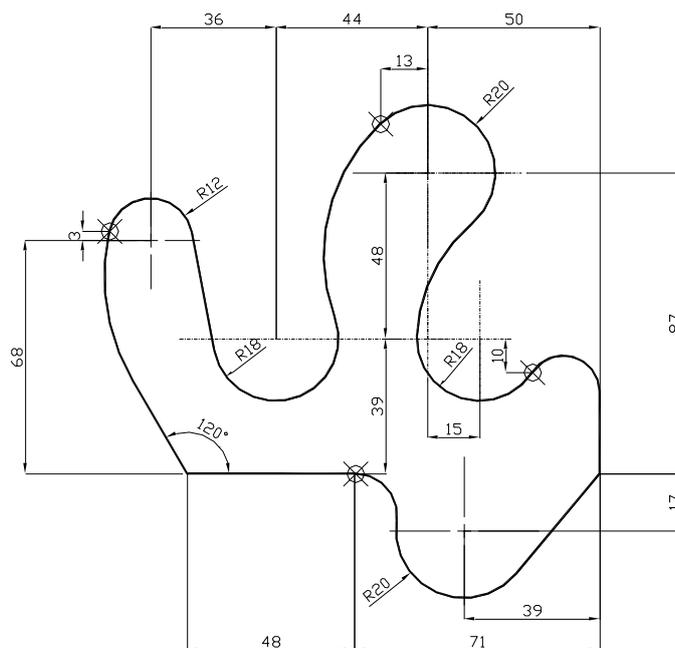
Resuelve el siguiente ejercicio de tangencias. Cotas en milímetros.



Resuelve el siguiente ejercicio de tangencias. Cotas en milímetros.



Resuelve el siguiente ejercicio de tangencias. Cotas en milímetros.





Resuelve el siguiente ejercicio de tangencias. Cotas en milímetros.

