



**ESTÁTICA  
ESTRUCTURAS  
ENUNCIADOS  
EJERCICIOS**

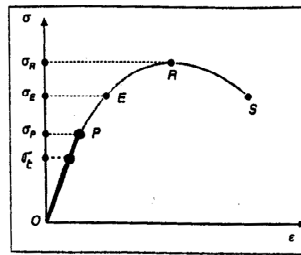


Diagrama de tracción  $\epsilon - \sigma$ .

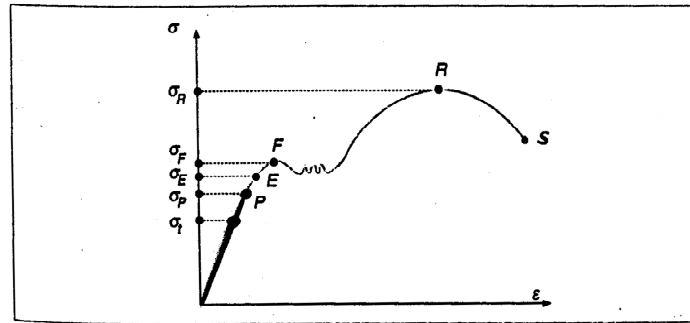


Diagrama de tracción del acero. Fenómeno de fluencia.

- $\sigma$ : tensiones ( $\text{kp/cm}^2$ )
- $\epsilon$ : deformaciones (alargamientos unitarios)
- $\sigma_t = \sigma_{adm}$ : tensión de trabajo (máxima admisible)
- $p$ : límite de alargamiento proporcional
- $\sigma_p$ : tensión correspondiente al límite de alargamiento proporcional
- $E$ : límite de elasticidad
- $\sigma_E$ : tensión correspondiente al límite de elasticidad
- $F$ : límite de fluencia
- $\sigma_F$ : tensión de fluencia
- $R$ : límite de rotura
- $\sigma_R$ : tensión de rotura
- $S$ : punto de rotura física total
- $E$ : módulo de elasticidad o módulo de Young

- OE: ZONA ELÁSTICA
- OP: ZONA DE PROPORCIONALIDAD
- PE: ZONA NO PROPORCIONAL

- ES: ZONA PLÁSTICA
- ER: ZONA LÍMITE DE ROTURA
- RS: ZONA DE ROTURA

$$\sigma = E \cdot \epsilon$$

siendo: 
$$\sigma = \frac{\text{Carga}}{\text{Superficie}} = \frac{P}{S}$$

y: 
$$\epsilon = \frac{\text{longitud final} - \text{longitud inicial}}{\text{longitud inicial}} = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0}$$

con lo cual: 
$$\Delta l = \frac{P \cdot l_0}{S \cdot E}$$

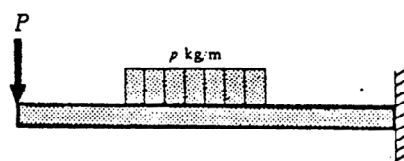
Por otra parte, la tensión de trabajo  $\sigma_t$  suele expresarse como una función de  $\sigma_F$  o de  $\sigma_R$ , aplicando el correspondiente coeficiente de seguridad:

$$\sigma_t = \frac{\sigma_F}{n_1} = \frac{\sigma_R}{n_2}$$

## Esfuerzo cortante y momento flector

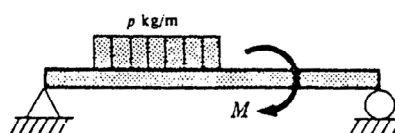
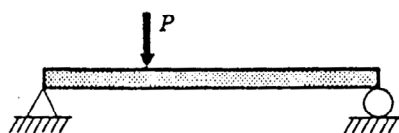
**DEFINICION DE VIGA.** Una barra sometida a fuerzas o pares situados en un plano que contiene a su eje longitudinal se llama viga. Se supone que las fuerzas actúan perpendicularmente a dicho eje longitudinal.

**VIGAS EN VOLADIZO.** Si la viga está sujeta solamente en un extremo, de tal manera que su eje no pueda girar en ese punto, se llama viga en voladizo. En la figura adjunta se representa este tipo de viga. El extremo izquierdo puede flexar libremente, mientras que el derecho está sujeto rígidamente. Generalmente, se dice que el extremo derecho está «empotrado». La reacción del muro de la derecha que soporta a la viga sobre ésta, consiste en una fuerza vertical junto con un par, que actúan en el plano de las cargas aplicadas.



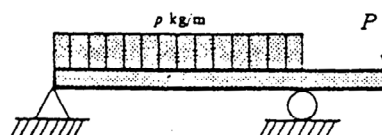
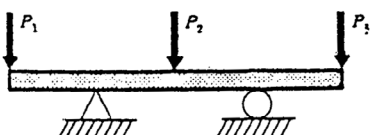
**VIGAS SIMPLEMENTE APOYADAS.** Una viga que está apoyada libremente en los dos extremos se llama viga simplemente apoyada. Este término implica que los apoyos extremos son capaces de ejercer sobre la barra solamente fuerzas y no momentos. Por tanto, no existe impedimento al giro de los extremos de la barra en los apoyos cuando flexa bajo las cargas. Más abajo se representan dos vigas simplemente apoyadas.

Debe observarse que al menos uno de los apoyos ha de ser capaz de sufrir un movimiento horizontal, de modo que no exista ninguna fuerza en la dirección del eje de la viga. Si ninguno de los dos extremos fuera capaz de moverse horizontalmente se produciría alguna fuerza axial en la viga cuando se deformara bajo la carga. En este libro no se considerarán problemas de esta naturaleza.



Se dice que la primera viga de la figura de encima está cargada con una fuerza aislada y la segunda está sometida a una carga uniformemente repartida y un par.

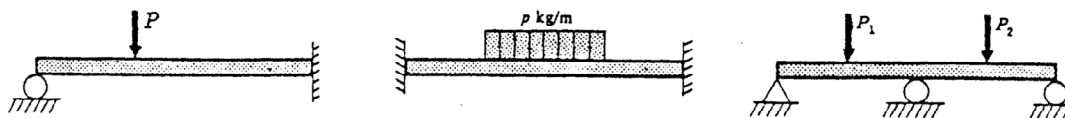
**VIGAS CON VOLADIZOS.** Una viga apoyada libremente en dos puntos y que tiene uno o los dos extremos que continúan más allá de esos puntos se llama viga con voladizos. A continuación aparecen dos ejemplos.



**VIGAS ESTATICAMENTE DETERMINADAS.** Todas las vigas consideradas antes, los voladizos, las simplemente apoyadas y las con voladizos extremos son tales, que se pueden determinar las reacciones en los apoyos utilizando las ecuaciones del equilibrio estático. Los valores de estas reacciones son independientes de las deformaciones de la viga. Se dice que son vigas estáticamente determinadas.

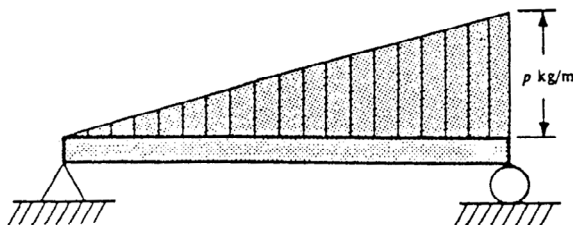
**VIGAS ESTATICAMENTE INDETERMINADAS.** Si el número de reacciones que se ejercen sobre la viga excede del número de ecuaciones del equilibrio estático, hay que suplementar estas ecuaciones con otras basadas en las deformaciones de la viga. En este caso, se dice que ésta es estáticamente indeterminada.

Una viga en voladizo que está apoyada en el extremo, una viga empotrada rigidamente en los dos extremos y una viga que se extiende sobre tres o más apoyos son ejemplos de vigas indeterminadas. Tienen el aspecto de las figuras siguientes.



Este tipo de vigas se estudiará en el Capítulo 11.

**TIPOS DE CARGAS.** Las cargas comúnmente aplicadas a una viga pueden consistir en fuerzas aisladas (aplicadas en un punto), cargas uniformemente repartidas, en cuyo caso se expresa la magnitud por cierto número de kilogramos por metro de longitud de viga, o cargas variables uniformemente, como se muestra a continuación.



Una viga puede estar cargada también por un par aplicado a ella. La magnitud del par se suele expresar en kg-m o kg-cm.

En este libro solo se considerarán cargas aplicadas gradualmente. Las cargas dinámicas o de impacto, en una viga, requieren un estudio de un tipo considerablemente más difícil.

**FUERZAS Y MOMENTOS INTERNOS EN VIGAS.** Cuando una viga está cargada con fuerzas y pares, en la barra se producen tensiones internas. En general, existen tensiones normales y cortantes. Para determinar su magnitud en cada sección es necesario conocer la fuerza y el momento resultantes que actúan en dicha sección, que pueden hallarse aplicando las ecuaciones del equilibrio estático.

Esto se verá, quizá, más fácilmente considerando como ejemplo un caso particular de cargas, como el de la Fig. 1, en que sobre una viga simplemente apoyada actúan varias cargas aisladas.

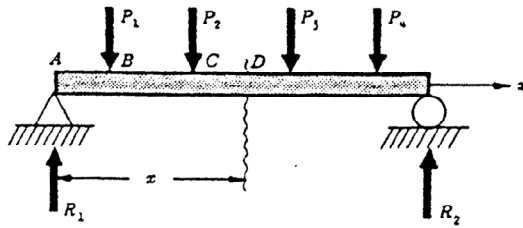


Fig. 1

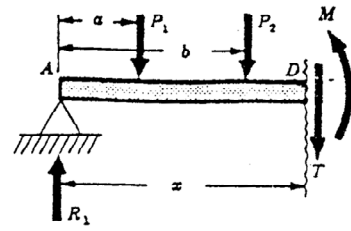


Fig. 2

Se quiere estudiar las tensiones internas en la sección  $D$ , situada a la distancia  $x$  del extremo izquierdo de la viga. Para ello consideremos que se corta la viga en  $D$  y que se suprime la parte de la derecha de esta sección. Deberá sustituirse la parte suprimida por el efecto que ejercía sobre el trozo de la izquierda, efecto que consiste en una fuerza cortante vertical juntamente con un par, representados por los vectores  $T$  y  $M$ , respectivamente, en el esquema de cuerpo en libertad de la parte izquierda de la viga, que se representa en la Figura 2.

La fuerza  $T$  y el par  $M$  mantienen la parte izquierda de la barra en equilibrio bajo la acción de las fuerzas  $R_1$ ,  $P_1$ ,  $P_2$ . Se toman  $T$  y  $M$  positivas si tienen el sentido indicado arriba.

**MOMENTO RESISTENTE.** El par  $M$  representado en la Fig. 2 se llama momento resistente en la sección  $D$ . La magnitud de  $M$  puede hallarse utilizando una ecuación de la estática que expresa que la suma de los momentos de todas las fuerzas respecto a un eje que pasa por  $D$  y es perpendicular al plano del papel, es cero. Así.

$$\Sigma M_o = M - R_1x + P_1(x - a) + P_2(x - b) = 0$$

o

$$M = R_1x - P_1(x - a) - P_2(x - b)$$

Por tanto, el momento resistente  $M$  es el producido en  $D$  por los momentos de la reacción en  $A$  y las fuerzas aplicadas  $P_1$  y  $P_2$ .  $M$  es el par resultante debido a las tensiones repartidas en la sección vertical  $D$ . Estas tensiones actúan en dirección horizontal y son tracciones en ciertas zonas de la sección y compresiones en otras. En el Capítulo 8 se estudiará con detalle su naturaleza.

**CORTANTE RESISTENTE.** La fuerza vertical  $T$  representada en la Fig. 2 de más arriba se llama cortante resistente en la sección  $D$ . Para que exista equilibrio de fuerzas en la dirección vertical

$$\Sigma F_v = R_1 - P_1 - P_2 - T = 0$$

o

$$T = R_1 - P_1 - P_2$$

Esta fuerza  $T$  es en realidad la resultante de las tensiones cortantes repartidas en la sección vertical  $D$ . La naturaleza de éstas se estudiará en el Capítulo 8.

**MOMENTO FLECTOR.** La suma algebraica de los momentos de las fuerzas exteriores situadas a un lado de la sección  $D$ , respecto a un eje que pasa por  $D$ , se llama momento flector en  $D$ . Esto se representa por

$$R_1x - P_1(x - a) - P_2(x - b)$$

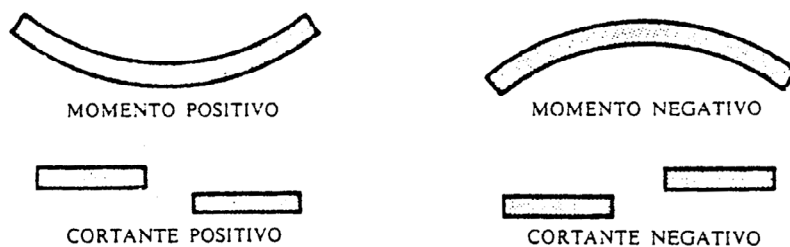
para las cargas consideradas antes. Esta magnitud se considera en los Problemas 1 a 15 inclusive. El momento flector es, pues, de sentido opuesto al momento resistente y de la misma magnitud. Se suele representar también por  $M$ . Normalmente se usa en los cálculos el momento flector en lugar del resistente, porque se puede expresar directamente en función de las cargas exteriores.

**ESFUERZO CORTANTE.** La suma algebraica de todas las fuerzas verticales situadas a un lado, por ejemplo, el izquierdo, de la sección  $D$  se llama esfuerzo cortante en esa sección. Se representa por

$$R_1 - P_1 - P_2$$

para las cargas anteriores. El esfuerzo cortante es de sentido opuesto y la misma magnitud que el cortante resistente. Generalmente se le representa por  $T$ . Se le suele usar en los cálculos en lugar del cortante resistente. Se considerará en los Problemas 1 a 15 inclusive.

**CRITERIO DE SIGNOS.** El criterio habitual de signos para el esfuerzo cortante y el momento flector aparece en los esquemas siguientes.



Así, una fuerza que tiende a flexar la viga de modo que la concavidad esté hacia arriba, como se representa en el esquema superior izquierdo, se dice que produce un momento flector positivo. Una fuerza que tiende a cortar la parte izquierda de la viga hacia arriba respecto a la parte derecha, como se indica en el esquema inferior izquierdo, se dice que produce un esfuerzo cortante positivo.

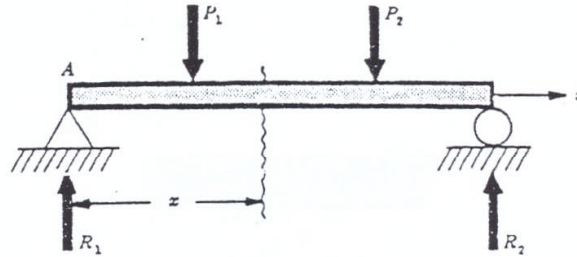
Un método más sencillo para determinar el signo algebraico del momento flector en una sección cualquiera es considerar que las fuerzas exteriores dirigidas hacia arriba producen momentos flectores positivos y las dirigidas hacia abajo, momentos negativos.

**ECUACIONES DE CORTANTE Y MOMENTO.** Generalmente es conveniente introducir un sistema coordenado a lo largo de la viga con origen en un extremo de la misma. Es conveniente conocer el esfuerzo cortante y el momento flector en todas las secciones de la viga, para lo cual se escriben dos ecuaciones, una que da el esfuerzo cortante  $T$  en función de la distancia,  $x$ , a un extremo de ella, y la otra que da el momento flector  $M$  en función de  $x$ .

**DIAGRAMAS DEL ESFUERZO CORTANTE Y EL MOMENTO FLECTOR.** La representación gráfica de estas ecuaciones en  $T$  y  $M$  se conoce como diagrama del esfuerzo cortante y del momento flector, respectivamente. En estos gráficos, las abscisas (horizontales) indican la posición de la sección a lo largo de la viga y las ordenadas (verticales) representan los valores del esfuerzo cortante y el momento flector, respectivamente. Por tanto, indican gráficamente la variación de esas dos magnitudes en una sección a lo largo de la barra. Es muy fácil determinar, con esos gráficos, el valor máximo de cada una de ellas.



RELACION ENTRE ESFUERZO CORTANTE Y MOMENTO FLECTOR. Más abajo se representa una viga simplemente apoyada con varias cargas aplicadas. Se establece el sistema de coordenadas con origen en el extremo izquierdo  $A$  y las distancias a las diversas secciones de la viga se expresan por la variable  $x$ .



Para un valor cualquiera de  $x$ , el esfuerzo cortante  $T$  y el momento flector  $M$  están relacionados por la ecuación

$$T = \frac{dM}{dx}$$


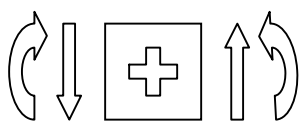
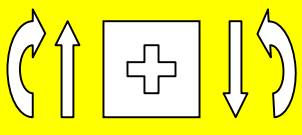
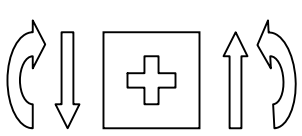
Relación entre el “esfuerzo cortante” $T$ , y el “momento flector” $M$		
ENTRANDO POR...		
	IZQUIERDA	DERECHA
<b>CRITERIO DE SIGNOS QUE USAREMOS</b> 	$T = \frac{+dM}{dx}$	$T = \frac{-dM}{dz}$
<b>CRITERIO DE SIGNOS ALTERNATIVO</b> 	$T = \frac{-dM}{dx}$	$T = \frac{+dM}{dz}$

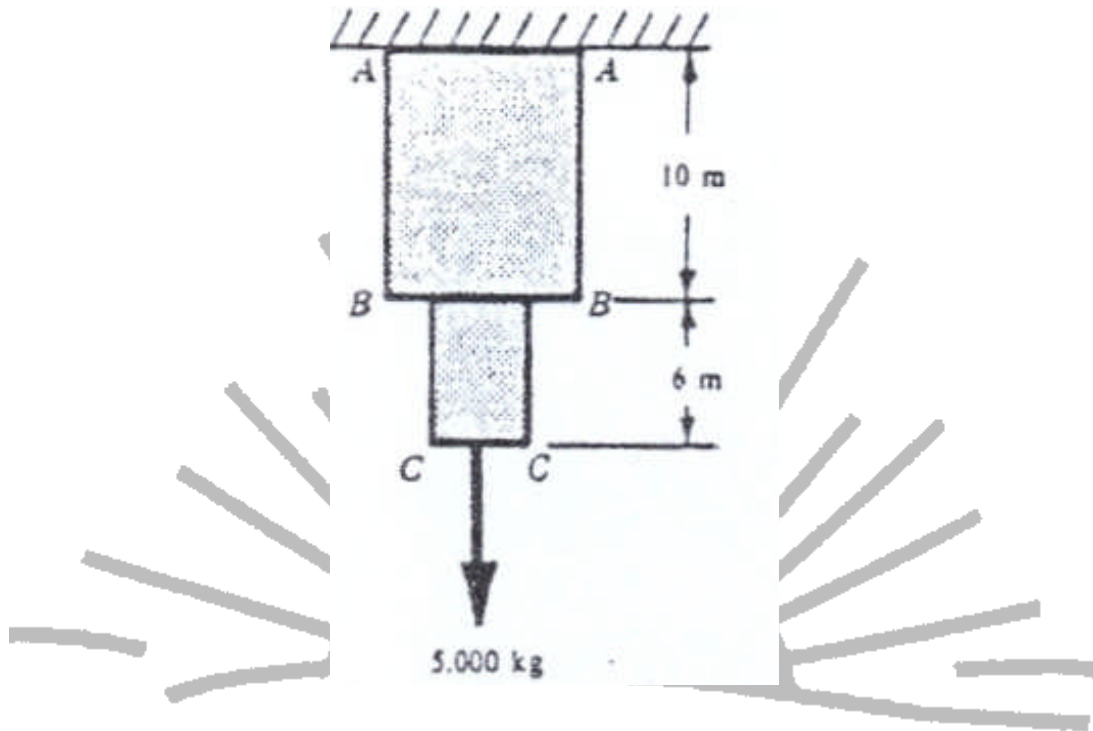
Tabla para determinar el signo de los “esfuerzos cortantes” T y de los “momentos flectores” M					
SIGNOS POSITIVOS			ENTRANDO POR...		
			IZQUIERDA	DERECHA	
<b>CRITERIO DE SIGNOS QUE USAREMOS</b> 	T	GENERADO POR...	FUERZAS	↑	↓
			M	GENERADO POR...	FUERZAS
	PARES O MOMENTOS	↻ H			↻ AH
<b>CRITERIO DE SIGNOS ALTERNATIVO</b> 	T	GENERADO POR...	FUERZAS	↓	↑
			M	GENERADO POR...	FUERZAS
	PARES O MOMENTOS	↻ H			↻ AH



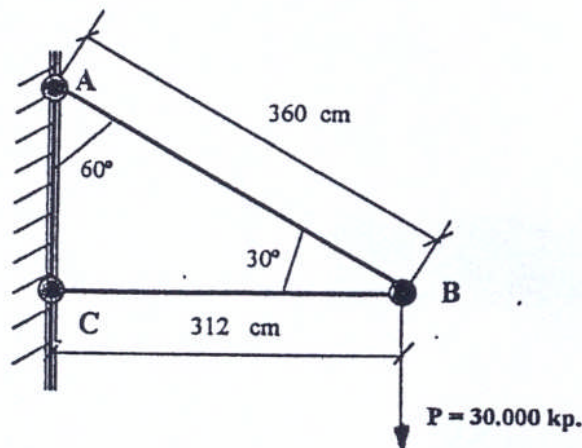


**ENUNCIADOS EJERCICIOS ESTÁTICA – ESTRUCTURAS**

1. Dos barras prismáticas están unidas rígidamente y soportan una carga de 5.000 Kg. La barra superior es de acero, con una densidad de  $0'0078 \text{ Kg./cm}^3$ , una longitud de 10 m. y una sección de  $60 \text{ cm}^2$ . La inferior es de bronce con densidad  $0'008 \text{ Kg./cm}^3$ , una longitud de 6 m. y una sección de  $50 \text{ cm}^2$ . Determinar las tensiones máximas en cada material.



2. Las dos barras AB y BC están articuladas en cada extremo y soportan la carga representada en la figura. El metal es acero recocido con un límite elástico convencional de  $4.200 \text{ Kp/cm}^2$ . Son aceptables los coeficientes de seguridad de 2 para los elementos que trabajan a tracción y 3 para los que trabajan a compresión. Determinar las secciones necesarias en las barras y sus variaciones de longitud. Tomar para el acero  $E = 2'1 \times 10^6 \text{ Kp/cm}^2$ .



3. Se tiene una columna de piedra de granito de 5 m. de longitud y 50 cm. de diámetro. Calcular la disminución de longitud que experimenta como consecuencia de su propio peso. Peso específico de la piedra  $\gamma = 2.700 \text{ kg/m}^3$ . Módulo de elasticidad  $E = 300.000 \text{ Kg/cm}^2$ .
4. Calcular la longitud máxima que puede tener un cable de mina cargado en su extremo con 1.000 Kg., cuya tensión admisible es  $\sigma_{adm} = 1.200 \text{ kg/cm}^2$ , peso específico  $\gamma = 7'8 \text{ kg/dm}^3$ , y sección  $S = 3 \text{ cm}^2$ .
5. Dada una barra prismática con los dos extremos perfectamente empotrados y cargada axialmente en una sección intermedia con un peso P, determinar las reacciones.
6. Los dos hilos que sustentan la barra AB de peso propio despreciable son de acero y de cobre. ¿A qué distancia de A debe colocarse un peso de 5.000 Kg. para que la barra permanezca horizontal? Dimensionar los hilos y decir cuál de ellos trabaja por debajo de sus posibilidades. Consideraremos que las secciones de los dos hilos deberán ser iguales.

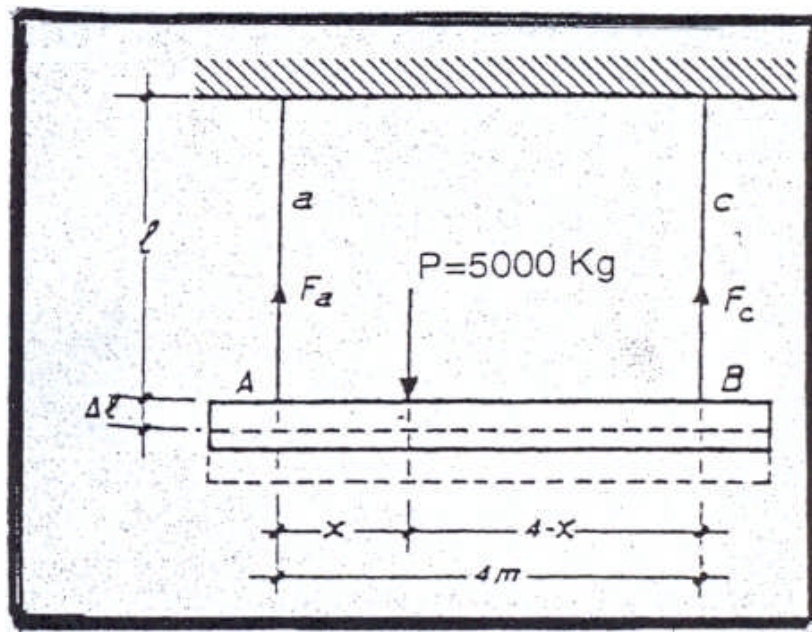
Datos:

$$\sigma_A = 1.200 \text{ Kg./cm}^2$$

$$\sigma_C = 675 \text{ Kg./cm}^2$$

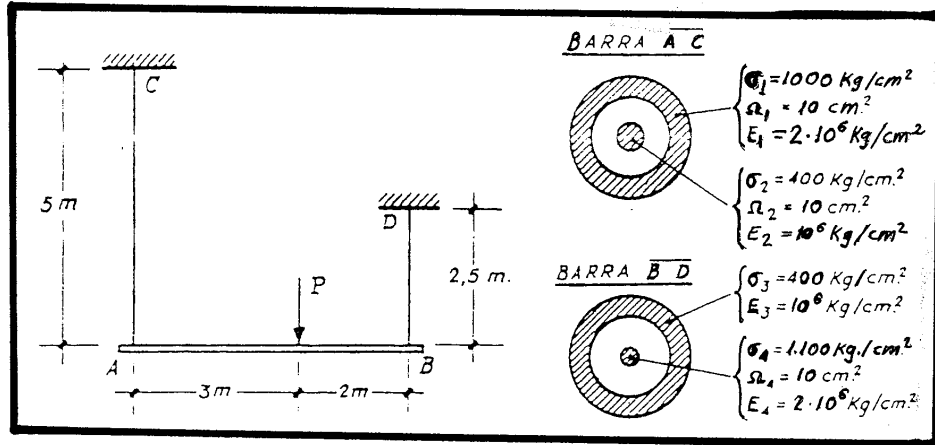
$$E_A = 2 \cdot 10^6 \text{ Kg./cm}^2$$

$$E_B = 1 \cdot 10^6 \text{ Kg./cm}^2$$

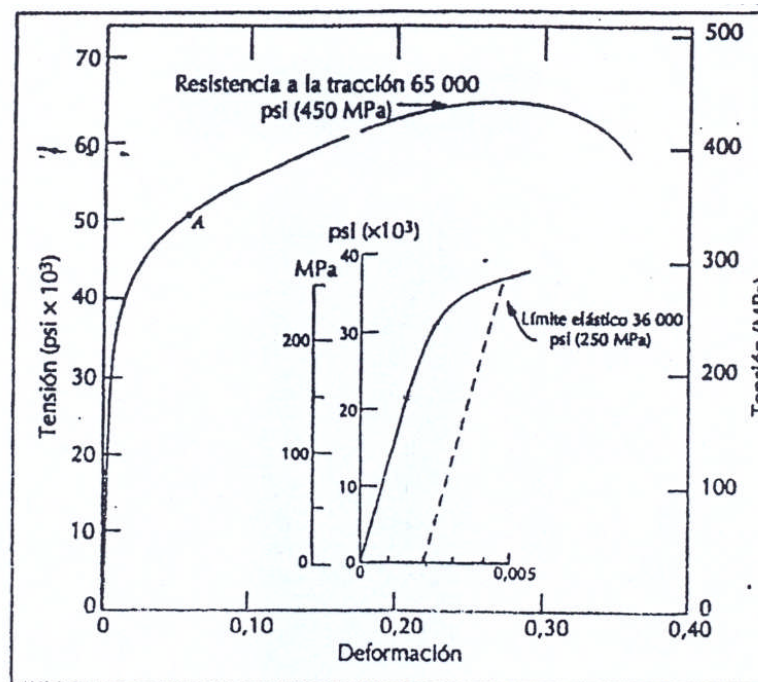




7. ¿Cuál es el valor que podrá tomar P manteniéndose horizontal la barra AB, si ésta se supone rígida, y además se consideran despreciables los pesos propios? Las características de las barras AC y BD están indicadas en la figura. Calcular también el menor valor de la sección  $\Omega_3$ .



8. Un par de barras en paralelo forman parte de un mecanismo que en funcionamiento ejerce sobre cada de ellas una pequeña fuerza de tracción. Las barras son cilíndricas de 10 mm. de diámetro y 120 mm. de longitud construidas con latón cuya gráfica de tensión/deformación se adjunta. La fuerza alcanza un valor de 11.750 N sobre cada una de ellas. Calcular:
- La máxima longitud que llegan a alcanzar las barras.
  - La longitud de las barras cuando el esfuerzo ha cesado.
  - Por accidente una de las barras se rompe con lo que la otra debe soportar toda la carga es decir 23.500 N. En esta situación determinar lo que le ocurre a la barra una vez que el esfuerzo ha cesado.



9. En el sistema de la figura contenida en un plano vertical, se pide calcular el valor máximo del peso P.

Datos:

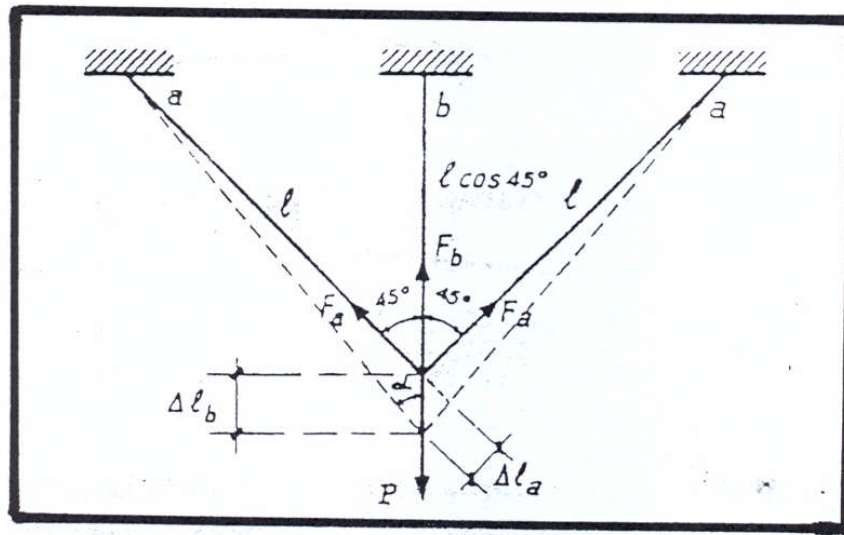
$$E_a = 2 \cdot 10^6 \text{ Kg./cm}^2$$

$$E_b = 1'5 \cdot 10^6 \text{ Kg./cm}^2$$

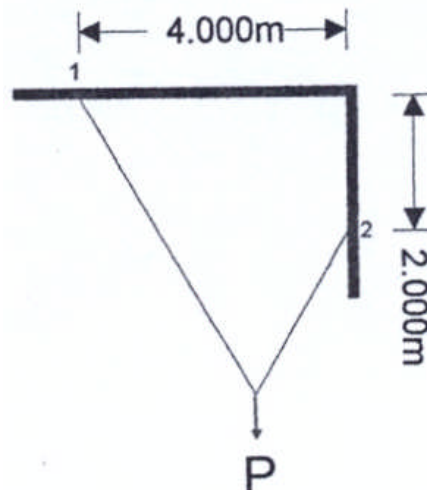
$$\sigma_a = 1.000 \text{ Kg./cm}^2$$

$$\sigma_b = 700 \text{ Kg./cm}^2$$

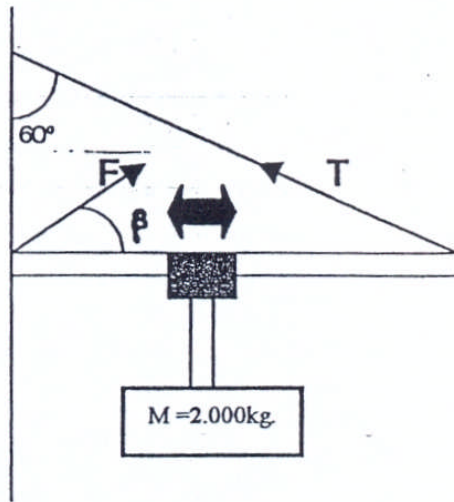
$$\Omega_a = \Omega_b = 3 \text{ cm}^2.$$



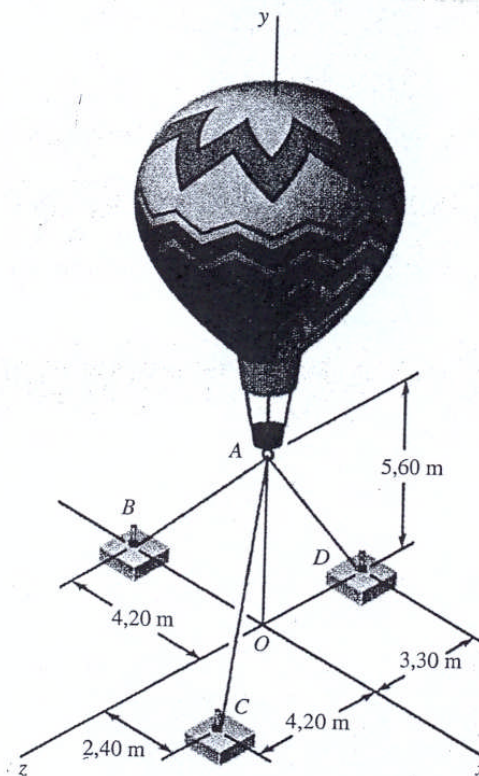
10. Una cuerda de 8 m de longitud se ata a los extremos 1 y 2 de techo y pared respectivamente. En ella colgamos un peso P, desplazable a lo largo de la misma. Determinar la posición de dicho peso, así como la tensión que soporta la cuerda.



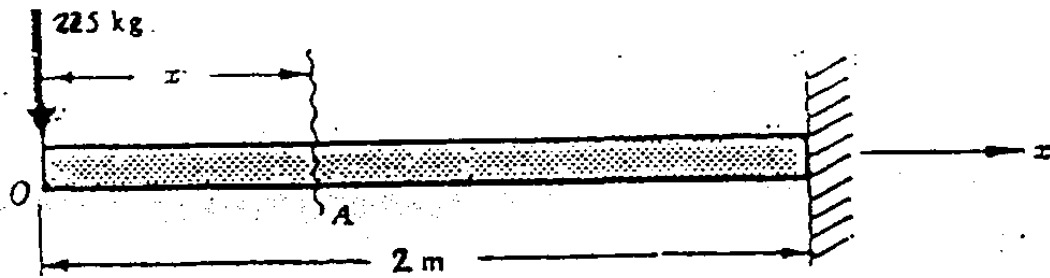
11. La viga de la figura adjunta, que pesa 1.000 Kg. y tiene 8 m. de larga, hace de carril aéreo. Sobre ella desliza un colgador en el que colocamos un peso de 2.000 Kg. Calcular:
- La tensión del cable del soporte.
  - La fuerza ejercida por la pared sobre la viga y el ángulo que forma esta con la horizontal, cuando la carga se encuentra a una distancia de 6 m. de la pared.
- Nota: se desprecian los pesos del colgador y cables.



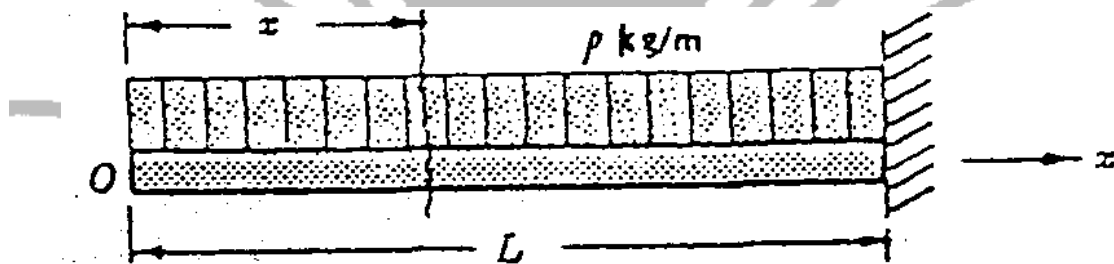
12. Se representa un globo anclado mediante tres cables. Hallar la fuerza vertical  $P$  que el globo ejerce en  $A$  sabiendo que la tensión en el cable  $AB$  es de 259 N.



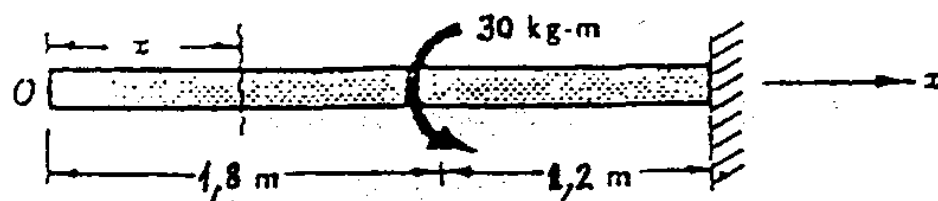
13. Escribir, para la viga en voladizo de la figura, las ecuaciones del esfuerzo cortante y el momento flector en cada punto de la barra. Dibujar, aproximadamente a escala, los diagramas del esfuerzo cortante y el momento flector.



14. Para la viga en voladizo sometida a una carga uniformemente repartida de  $p$  Kg. por metro lineal, representada en la figura, escribir las ecuaciones del esfuerzo cortante y del momento flector en cualquier punto de la barra. Dibujar además los diagramas del esfuerzo cortante y del momento flector aproximadamente a escala.

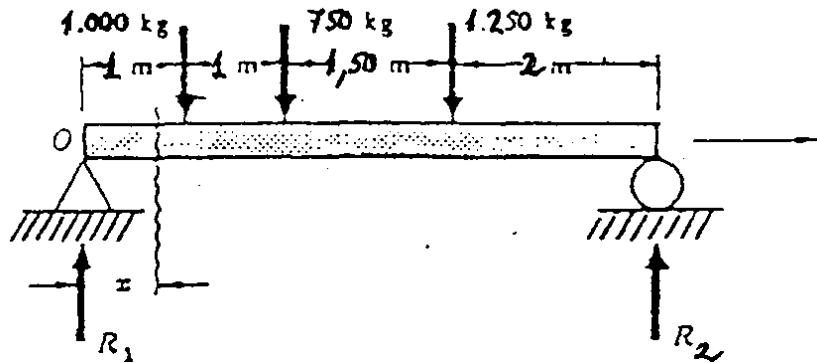


15. Considerar una viga cargada solo con el par de 30 Kg-m representado en la figura. Escribir las ecuaciones del momento flector y del esfuerzo cortante en un punto cualquiera de la barra. Trazar los diagramas correspondientes.

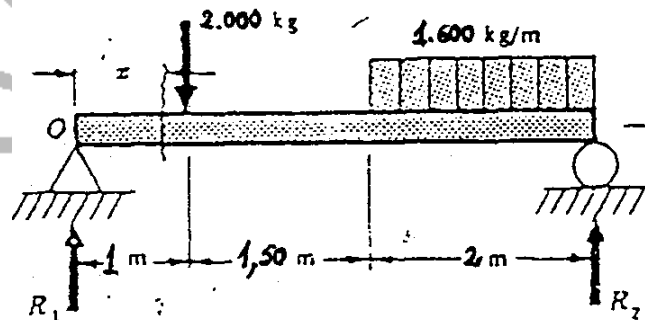




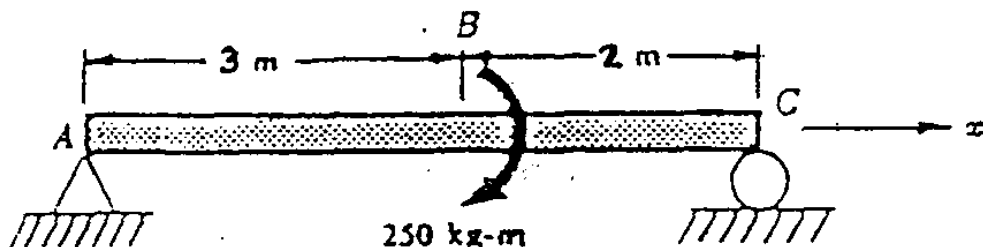
16. Escribir las ecuaciones del momento flector y del esfuerzo cortante en un punto cualquiera de la viga y dibujar los diagramas correspondientes para la viga simplemente apoyada sometida a tres cargas aisladas de la figura.



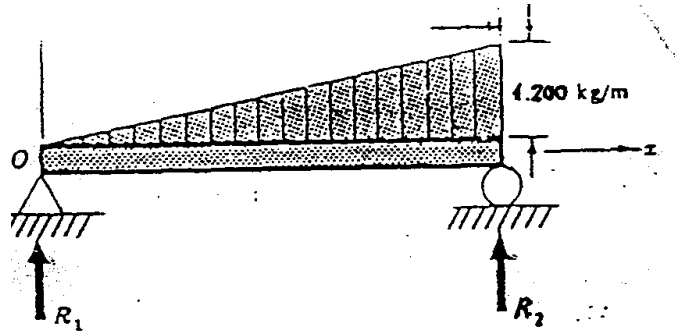
17. Una viga simplemente apoyada está sometida a una fuerza aislada de  $2.000 \text{ Kg}$ . junto con una carga repartida de  $1.600 \text{ Kg}$ . por metro lineal, como se ve en la figura. Escribir las ecuaciones del esfuerzo cortante y el momento flector en un punto cualquiera de la viga y dibujar los diagramas correspondientes.



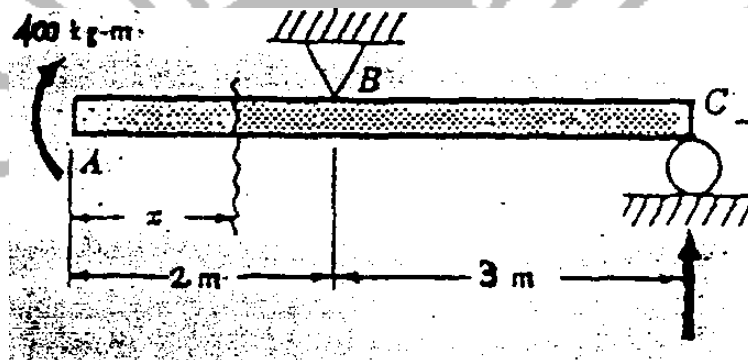
18. Una viga simplemente apoyada está sometida a un par de  $250 \text{ Kg}\cdot\text{m}$  representado en la figura. Trazar los diagramas de esfuerzos cortantes y de momentos flectores debidos a esta sollicitación.



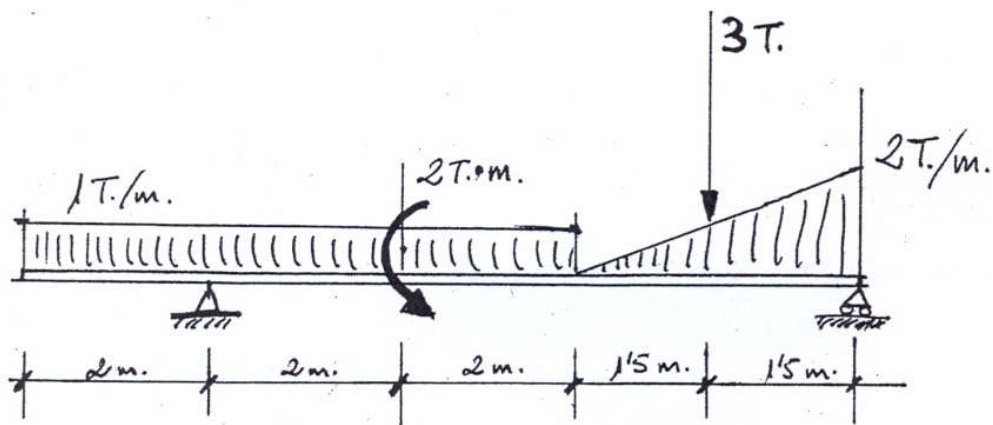
19. La viga simplemente apoyada de la figura soporta una carga vertical que aumenta uniformemente desde O en el extremo izquierdo hasta un valor máximo de 1.200 Kg. por metro lineal en el derecho. Dibujar los diagramas del esfuerzo cortante y del momento flector.



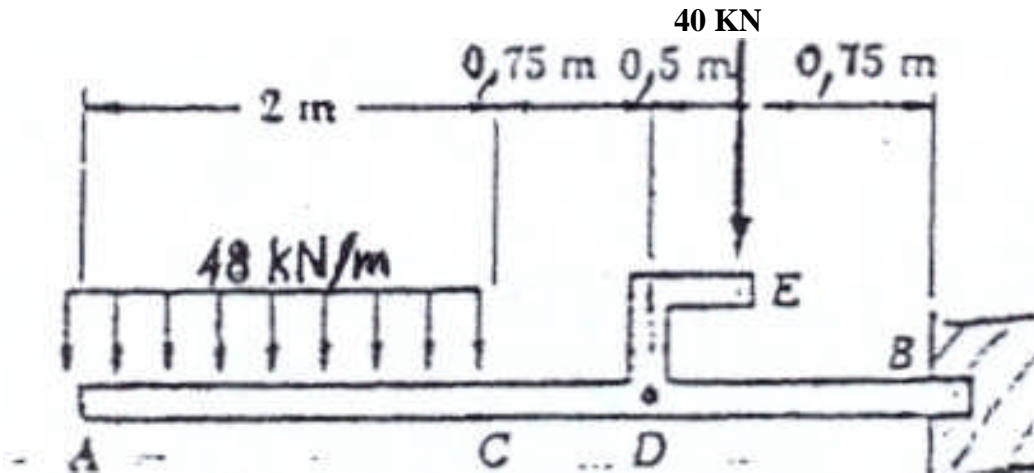
20. La viga AC está apoyada en B y en C y sometida a un par de 400 Kg\*m aplicado en A, como se muestra en la figura. Determinar las reacciones y dibujar los diagramas del esfuerzo cortante y momento flector.



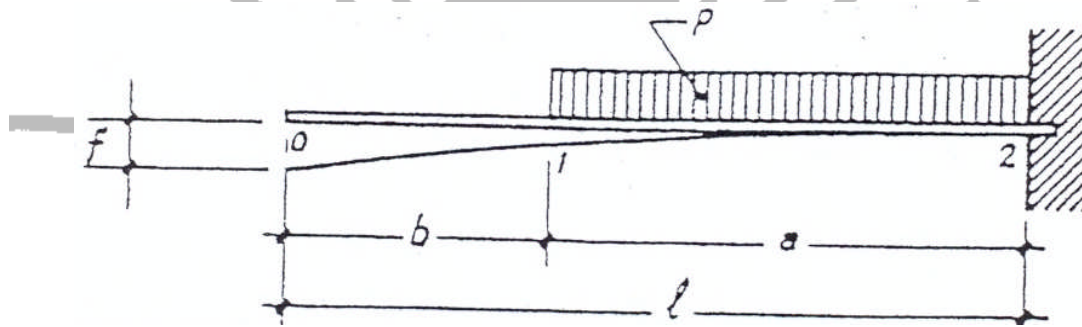
21. Determinar las ecuaciones correspondientes a esfuerzos cortantes y momentos flectores de la siguiente viga, así como los diagramas correspondientes.



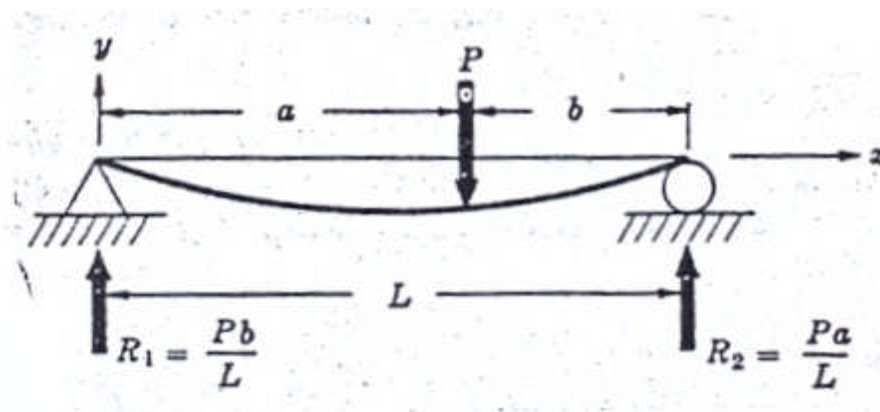
22. Dibujar los diagramas de esfuerzos cortantes y momentos flectores para la viga en voladizo AB. La carga repartida de 48 kN ocupa 2 m. del extremo de la viga y la de 40 kN está aplicada en E.



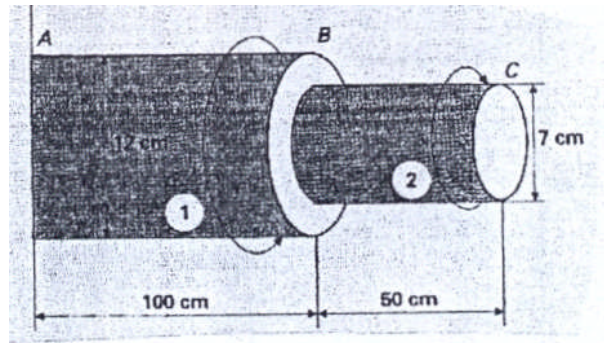
23. Hallar la ecuación de la línea elástica de la viga representada en la figura y la flecha.



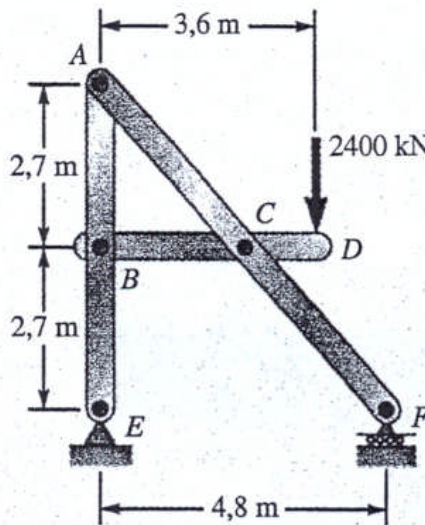
24. Determinar la elástica de la viga simplemente apoyada sometida a la carga P aislada que se muestra en la figura.



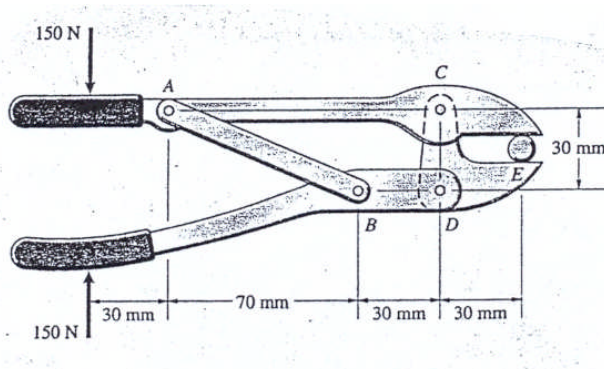
25. Obsérvese el árbol de la figura. En el extremo C actúa un par de 40.000 kp·cm y en la sección B otro de valor 70.000 kp·cm en los sentidos que se aprecian en la figura. Si el árbol es de acero, hallar:
- Tensión cortante máxima en cada una de las dos partes del árbol.
  - Ángulos de torsión en las secciones B y C.



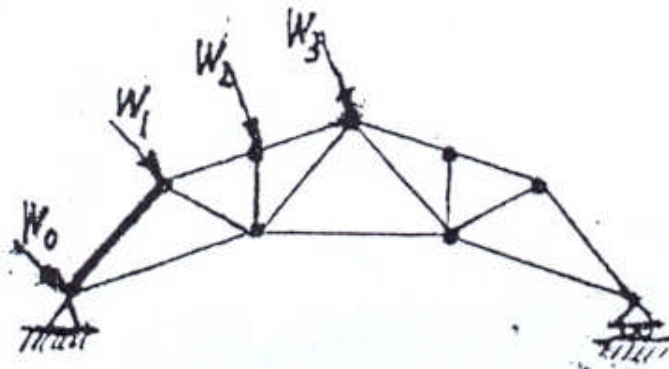
26. Determinar las componentes de las fuerzas que actúan sobre cada miembro del entramado representado.



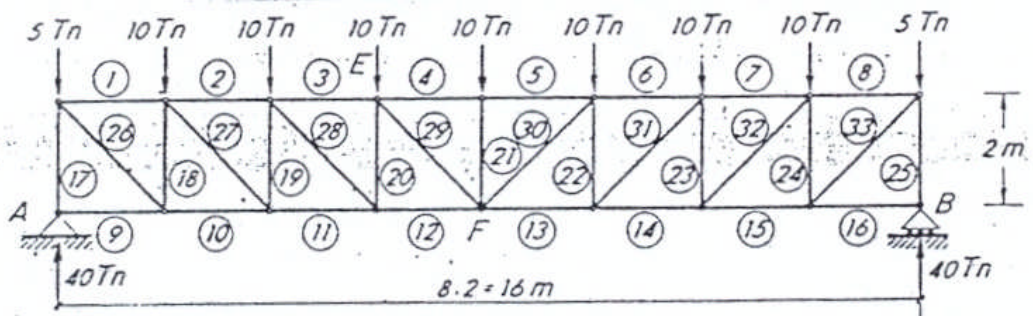
27. ¿Qué fuerzas se ejercen sobre el perno en E de la figura como resultado de las fuerzas de 150 N sobre las tenazas?



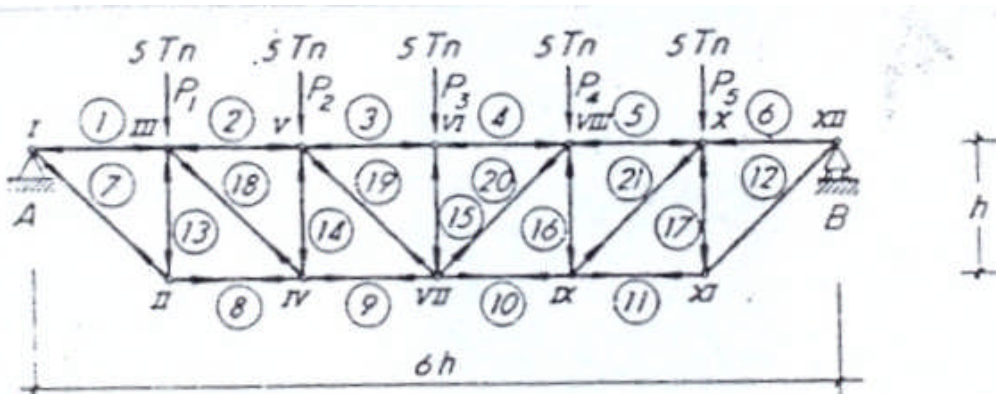
28. Determinar las reacciones que corresponden a la siguiente estructura tanto de forma analítica como de forma gráfica.



29. Determinar para la viga Pratt representada en la figura los esfuerzos correspondientes a las barras 4, 12 y 29.



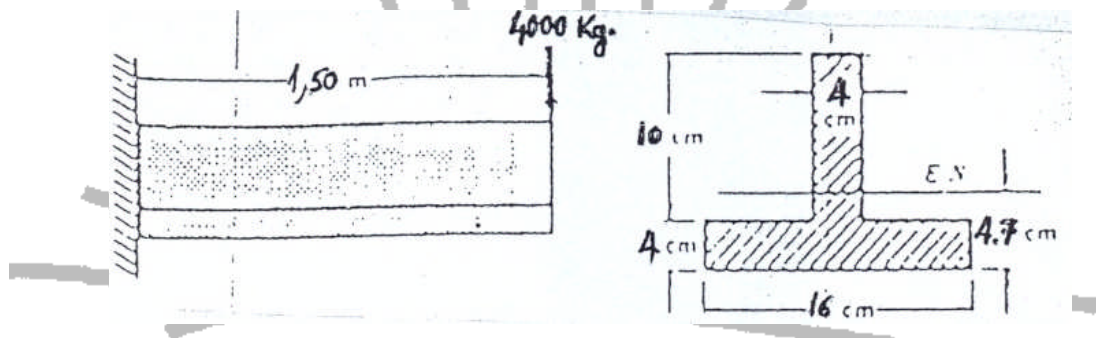
30. Calcular por el método de Cremona las fuerzas de barra que se producen en la viga Pratt que se representa en la figura siguiente.







31. Una viga de sección circular de 18 cm. de diámetro está simplemente apoyada en cada extremo y sometida a dos cargas aisladas de 10.000 Kg. cada una aplicadas a 30 cm. de los extremos. Determinar las tensiones de flexión máximas en la viga.
32. Una viga en voladizo de 3 m. de longitud está sometida a una carga uniformemente repartida de 2.000 Kg. por metro lineal. La tensión de trabajo admisible en tracción o en compresión es de 1.400 Kg./cm<sup>2</sup>. Si la sección debe ser rectangular determinar sus dimensiones siendo la altura el doble que la anchura.
33. Hay que cortar una viga de sección rectangular de un tronco circular de diámetro D. ¿Cual será la relación entre la altura y la anchura de la viga para que tenga la máxima resistencia a flexión pura?
34. Considerar la viga en voladizo sometida a la carga aislada representada en el esquema de abajo. La sección es en forma de T. Determinar la tensión cortante a 2 cm. de la cara superior en una sección y el valor máximo de esta tensión en la viga.



35. Dada la viga cuya sección se representa en la figura adjunta, calcular analíticamente la altura del alma de la viga para que resista, sabiendo que la tensión admisible de trabajo a flexión es de 1.580 Kg./cm<sup>2</sup>.

