

TEMA 43



**ESFUERZOS MECÁNICOS.
COMPOSICIÓN Y REPRESENTACIÓN
DE ESFUERZOS. CÁLCULO DE
ESFUERZOS EN PIEZAS SIMPLES.**

TEMA 43

ESFUERZOS MECÁNICOS.

COMPOSICIÓN Y REPRESENTACIÓN DE

ESFUERZOS. CÁLCULO DE ESFUERZOS

EN PIEZAS SIMPLES.

ÍNDICE

0. INTRODUCCIÓN	2
1. ESFUERZOS MECÁNICOS	2
1.1. FUERZAS INTERNAS	2
1.2. ACCIONES INTERNAS	3
1.3. ESFUERZO	4
1.4. RELACIÓN ENTRE LAS COMPONENTES DEL ESFUERZO Y LAS ACCIONES INTERNAS	5
2. COMPOSICIÓN Y REPRESENTACIÓN DE ESFUERZOS	7
2.1. COMPOSICIÓN DE FUERZAS COPLANARIAS Y POLÍGONO FUNICULAR	7
2.2. POLÍGONO FUNICULAR POR UN PUNTO	8
2.3. POLÍGONO FUNICULAR POR DOS PUNTOS	9
2.4. POLÍGONO FUNICULAR POR TRES PUNTOS	9
2.5. DESCOMPOSICIÓN DE UN SISTEMA DE FUERZAS EN DOS	10
2.6. DESCOMPOSICIÓN DE UN SISTEMA DE FUERZAS EN TRES	11
3. CÁLCULO DE ESFUERZOS EN PIEZAS SIMPLES	12
3.1. ESFUERZOS LONGITUDINALES	12
3.1.1. TRACCIÓN	12
3.1.1.1. CARACTERÍSTICAS DE LA TRACCIÓN SIMPLE	12
3.1.1.2. LEY DE HOOKE	13
3.1.2. COMPRESIÓN	14
3.2. CORTADURA PURA O CIZALLADURA	16
3.2.1. GENERALIDADES	16
3.2.2. TENSIÓN DE TRABAJO DE CORTADURA	17
3.2.3. CALCULO RESISTENTE DE PIEZAS SIMPLES: ROBLONADO	17
3.3. FLEXIÓN EN LAS VIGAS SOMETIDAS A CARGAS PUNTUALES Y UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDAS	19
3.3.1. GENERALIDADES	19
3.3.2. DEFORMACIONES PERPENDICULARES AL EJE LONGITUDINAL DE LA VIGA	20
3.3.3. FUERZAS Y MOMENTOS INTERNOS: FUERZA CORTANTE Y MOMENTO FLECTOR	21
3.4. TORSIÓN PURA	24
BIBLIOGRAFÍA	28

0. INTRODUCCIÓN

En este tema se van a estudiar los esfuerzos mecánicos a los que están sometidos los sólidos. De este estudio se van a encargar las teorías de la resistencia de materiales, las cuales tienen como objetivo establecer los criterios que nos permitan determinar el material más conveniente, la forma y las dimensiones más adecuadas que hay que dar a los elementos de una construcción o una máquina para que puedan resistir la acción de las fuerzas exteriores que los solicitan, así como para obtener este resultado de la forma más económica posible.

Así, podríamos decir que la resistencia de materiales permite determinar en una pieza sometida a un sistema dado de fuerzas exteriores:

- a) los esfuerzos interiores que se engendran en la pieza.
- b) las deformaciones que se originan.

Otro aspecto de gran importancia a tener en cuenta en la utilización de determinado material en un elemento integrante de una construcción es el de la estabilidad, entendiendo por tal la capacidad de oposición del elemento a grandes desplazamientos como consecuencia de pequeñas variaciones de la sollicitación exterior.

La resistencia de materiales estudia la pieza de una estructura. Por ello, no abarca el estudio de los problemas que se refieren a la estructura en su conjunto, como puede ser el de estimación de su estabilidad o su propio cálculo. Estos temas son materia de otra disciplina: la teoría de estructuras a la que la resistencia de materiales sirve de base.

1. ESFUERZOS MECÁNICOS

1.1. FUERZAS INTERNAS

Las fuerzas internas en un cuerpo se pueden considerar como fuerzas de interacción entre las partículas de materiales (átomos o moléculas) que constituyen el cuerpo. Este concepto de las fuerzas internas individuales expuestas por planos cortantes imaginarios se ilustra en la figura 1.

El cuerpo cargado que se muestra en la figura 1 (a) puede representar el caso general de un elemento de una máquina o estructura sometido a fuerzas externas. La figura 1 (a) muestra un plano cortante imaginario que pasa a través del cuerpo y lo separa en dos partes, como se indica en la figura 1 (b), en donde se ha girado la parte derecha. Este proceso de corte expone ciertas fuerzas internas en el cuerpo, como se puede observar. Las fuerzas internas expuestas por el plano cortante son las fuerzas de interacción entre aquellas partículas que han sido separadas y están localizadas a uno y otro lado del plano cortante.

En general, estas fuerzas tienen diferentes magnitudes y direcciones, como se indica en la figura 1 (b).

Las fuerzas internas que aparecen en la figura 1 (b) representan las que existen en la localización del plano cortante imaginario de la figura 1 (a). Las fuerzas internas existentes en otras localizaciones del cuerpo se exponen mediante los planos cortantes situados en posiciones diferentes.

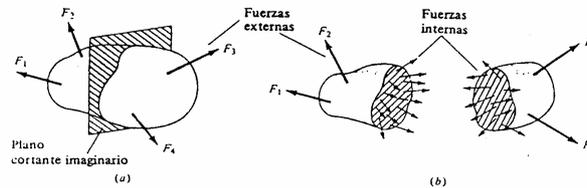


Figura 1: Fuerzas internas por un plano cortante imaginario.

1.2. ACCIONES INTERNAS

Cualquier conjunto de fuerzas se puede representar mediante un sistema estáticamente equivalente que conste de un vector de fuerza que actúe en un punto escogido arbitrariamente y un vector de par. Los vectores de fuerza y de par se denominan resultantes del conjunto de fuerzas. El vector fuerza resultante es igual a la suma vectorial de las fuerzas individuales del conjunto, y el vector de par resultante es igual al momento total de las fuerzas individuales del conjunto con respecto a un punto arbitrario. Las innumerables fuerzas individuales sobre partículas a uno y otro lado de un plano cortante imaginario que atraviesan a un cuerpo, tal como se indica en la figura 1 (b), se pueden representar, al igual que cualquier conjunto de fuerzas, mediante un vector de fuerza y un vector de par resultantes. Además, los vectores resultantes sobre cada superficie cortada se pueden resolver en sus componentes, como se muestra en la figura 2. Las componentes de las resultantes de las fuerzas internas, orientadas en el sistema de coordenadas x - y - z y con los ejes “ x ” perpendiculares a las superficies cortadas, se llaman acciones internas (Figura 2).

La componente de fuerza P que es normal a la superficie cortada, se llama fuerza normal o axial; además, se denomina de tracción si actúa en el sentido indicado en la figura 2 (a) y (b), y de compresión si actúa en el sentido opuesto. Las componentes de fuerza, V_y y V_z , que son paralelas a las superficies cortadas, se llaman fuerzas cortantes (o cizalladura). La suma vectorial de V_y y V_z nos indicaría la dirección en que saldrían despedidos los dos trozos del prisma; si este se rompiese por la sección recta. La componente normal T del vector de par se denomina momento de torsión o momento torsor y las componentes M_y y M_z , se denominan momentos de flexión, o momentos flectores. La resultante de M_y y M_z es el momento flector.

Así mismo, para distinguir entre los dos lados de un plano cortante imaginario, una superficie cortada como la de la figura 2 (a), en la cual las acciones internas actúan en los sentidos positivos de las coordenadas, se llama cara positiva, y una superficie cortada como la de la figura 2 (b), en la cual las acciones internas actúan en los sentidos negativos de las coordenadas, se llama cara negativa.

Las acciones internas, son las componentes de las resultantes de las fuerzas internas que actúan sobre un plano cortante imaginario. Las acciones internas

cambian con los planos cortantes así como lo hacen las fuerzas internas, de tal modo que hay un conjunto de acciones internas asociado con cada plano cortante que atraviesa un cuerpo.

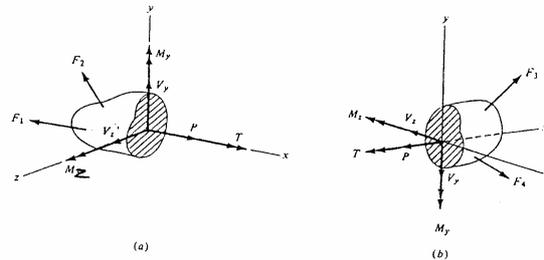


Figura 2: Acciones internas a ambos lados de un plano cortante imaginario.

1.3. ESFUERZO

Las fuerzas internas que actúan en diferentes puntos de un plano cortante son importantes. Por ejemplo, la capacidad de soportar carga de un elemento estructural o una parte de una máquina, puede depender de la mayor de estas fuerzas. Sin embargo, no es posible considerar las innumerables fuerzas individuales sobre partículas que actúan en un plano cortante. En lugar de esto, las fuerzas internas que actúan en diferentes puntos se describen en función de una cantidad denominada esfuerzo, que representa la intensidad de las fuerzas internas por unidad de área en las diferentes localizaciones de una sección cortada. Ver figura 3.

Definamos el esfuerzo respecto a una parte aislada de un cuerpo, como la que se muestra en la figura 3. En esta figura ΔA , es un pequeño elemento de área situado sobre una sección cortada imaginaria, el cual contiene un punto con coordenadas x y z . ΔF es la suma de todas las fuerzas internas individuales que actúan a través del área ΔA . El esfuerzo en el punto x y z situado sobre una sección cortada es un vector definido como:

$$S = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{dF}{dA}$$

El vector de esfuerzo, S , tiene la misma dirección y el mismo sentido que ΔF y representa la cantidad de fuerza interna por unidad de área en un punto situado sobre un plano cortante dado.

El esfuerzo tiene unidades de fuerza por unidad de área.

Un vector esfuerzo, S , se puede representar mediante componentes normal y tangencial a la superficie cortada, tal como se muestra en la figura 4. Utilizando los vectores unitarios i j k el vector de esfuerzo se puede expresar en la forma:

$$S = \sigma_x i + T_{xy} j + T_{xz} k$$

La componente x de S , designada por σ_x , es normal a la superficie cortada y se llama esfuerzo normal. El subíndice x indica la dirección de esta componente del esfuerzo. Los esfuerzos normales se denominan de tracción si actúan en el sentido indicado para σ_x en la figura 4, y de compresión si actúan en el sentido opuesto. Las componentes de esfuerzo y y z que aparecen en la figura 4 se llaman esfuerzos cortantes (debido a que tienden a producir una acción de corte en las partículas de material sobre las cuales actúan) y se designan mediante T_{xy} y T_{xz} . El primer subíndice indica la dirección de la normal al plano cortante sobre el cual actúa el esfuerzo, y el segundo subíndice indica la dirección de la componente.

Comparando las dos ecuaciones anteriores se puede ver que las componentes de dF expresadas mediante,

$$dF = dF_x \mathbf{i} + dF_y \mathbf{j} + dF_z \mathbf{k}$$

están relacionadas con las componentes del esfuerzo de la siguiente forma:

$$\sigma_x = \frac{dF_x}{dA} \quad T_{xy} = \frac{dF_y}{dA} \quad T_{xz} = \frac{dF_z}{dA}$$

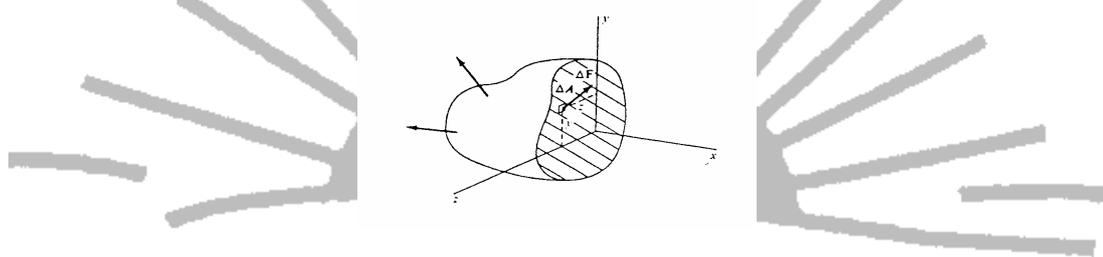


Figura 3: Fuerza dF que actúa sobre el área dA de una sección cortada.

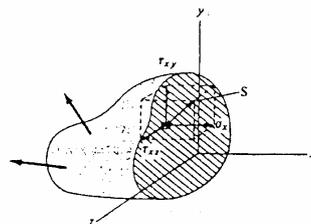


Figura 4: Componentes del esfuerzo en un punto situado sobre una sección cortada.

1.4. RELACIÓN ENTRE LAS COMPONENTES DEL ESFUERZO Y LAS ACCIONES INTERNAS

Tanto las acciones internas sobre una sección cortada como las componentes del esfuerzo sobre la misma sección, están relacionadas con las fuerzas internas que actúan sobre la sección. Por consiguiente, estas componentes del esfuerzo y las acciones internas deben estar relacionadas entre sí. Las relaciones entre las componentes de esfuerzo y las acciones internas se establecen utilizando el cálculo integral.

El área de la sección cortada como la de las figuras 3 y 4 se puede subdividir en áreas de tamaño infinitesimal dA sometidas a la acción de fuerzas dF . En la figura 5 se muestra un área típica dA sobre la cual actúan las componentes dF , expresadas, utilizando la última ecuación del apartado anterior, en la forma:

$$dF_x = \sigma_x dA \qquad dF_y = T_{xy} dA \qquad dF_z = T_{xz} dA$$

Las fuerzas dF que actúan sobre todas las áreas infinitesimales de una sección cortada representan las innumerables fuerzas internas individuales sobre esa sección. Por tanto, tienen resultantes idénticas a las acciones internas P , V_y , V_z , T , M_y y M_z sobre la sección.

$$P = \int_A \sigma_x dA \qquad T = \int_A (T_{xz} \cdot y - T_{xy} \cdot z) dA$$

$$V_y = \int_A T_{xy} \cdot dA \qquad M_y = \int_A \sigma_x \cdot z \cdot dA$$

$$V_z = \int_A T_{xz} \cdot dA \qquad M_z = - \int_A \sigma_x \cdot y \cdot dA$$

La columna izquierda de las ecuaciones expresa el hecho de que las sumas de las fuerzas,

$$dF_x = \sigma_x dA \qquad dF_y = T_{xy} dA \qquad dF_z = T_{xz} dA$$

son iguales a las fuerzas resultantes P , V_y y V_z , respectivamente.

La columna derecha expresa el hecho de que las sumas de los momentos de estas mismas fuerzas respecto a los ejes x y z son iguales a los momentos resultantes, T , M_y y M_z , respectivamente.

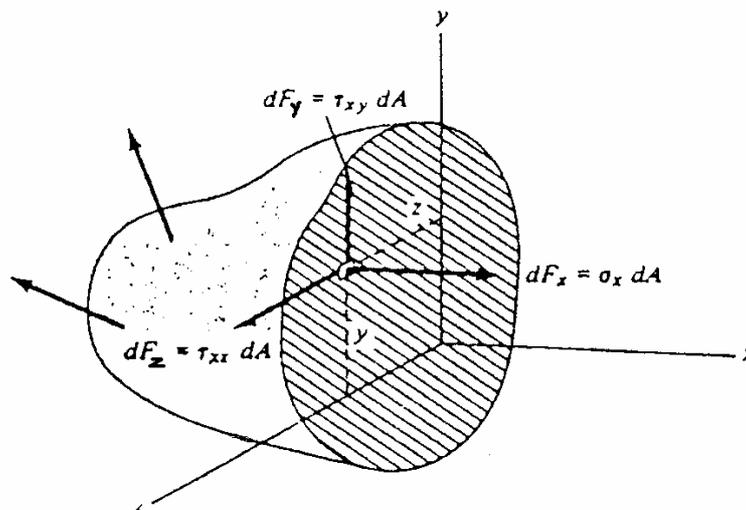


Figura 5: Fuerzas que actúan sobre un área infinitesimal, dA , expresadas en función de las componentes del esfuerzo.

2. COMPOSICIÓN Y REPRESENTACIÓN DE ESFUERZOS

2.1. COMPOSICIÓN DE FUERZAS COPLANARIAS Y POLÍGONO FUNICULAR

Supóngase que en un sistema con un número cualquiera de fuerzas coplanarias (ver figura 6), por ejemplo, V_1 , V_2 , V_3 , V_4 , y V_5 , se desea determinar la resultante. A menudo se recurre a la construcción siguiente: en el plano de las fuerzas consideradas se llevan consecutivamente, a partir de un punto cualquiera, todas las fuerzas del sistema:

$$\begin{array}{lll} V_1 = AB & V_2 = BC & V_3 = CD \\ V_4 = DE & V_5 = EF & \end{array}$$

El polígono ABCDEF así obtenido se denomina polígono vectorial.

La fuerza resultante:

$$R = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 = AF$$

presenta la dirección, el sentido y la longitud pedidas; para obtener la recta de acción se toma un punto P, que se llama polo, no perteneciente a los lados del polígono y se proyecta desde él los vértices A, B, C, D, E y F, con los que resulta el denominado polígono funicular, que tiene por lados al' , $l'2'$, $2'3'$, $3'4'$, $4'5'$ y $5'b$, respectivamente paralelos a las líneas de proyección 1, 2, 3, 4, 5, 6 y la intersección del primer lado y el último del polígono funicular determina el punto M por el cual pasa la recta de acción (ver figura 6).

De hecho, V_1 puede considerarse resultante de dos fuerzas que actúan según los lados al' y $l'2'$ de magnitudes equivalentes a PA y PB respectivamente, por lo que pueden ser sustituidos por éstos; análogamente V_2 se puede sustituir por PB y CP, etc.

Pero las fuerzas BP y PB se equilibran, porque tienen la misma recta de acción, la misma magnitud y sentidos opuestos; igual ocurre con CP y PC, etc. Por consiguiente, las fuerzas del sistema considerado equivalen a dos fuerzas que actúan según los lados extremos del polígono funicular y que miden PA y FP, cuya resultante R lo es también del sistema considerado y pasa por el punto M.

El polígono funicular que corresponde a un sistema dado de fuerzas puede ser modificado variando el orden de las fuerzas, desplazando el primer lado y cambiando el polo.

Variando el orden de algunas fuerzas, sólo se modifican los lados del polígono funicular comprendidos entre las fuerzas desplazadas. La variación del polo está regulada por el teorema de Culmann, según el cual los lados correspondientes a los dos polígonos funiculares construidos con polos cualesquiera P y P', se cortan en puntos

situados sobre una recta paralela a la de unión PP' y que se denomina recta de Culmann o eje de homología del sistema de fuerzas consideradas.

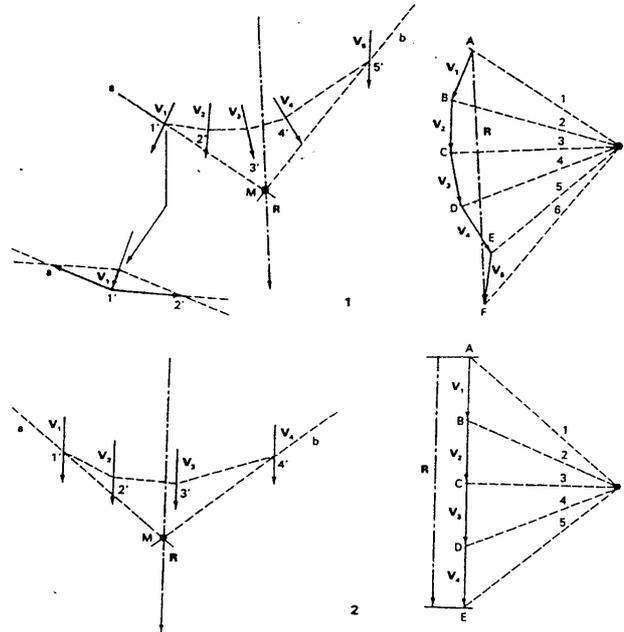


Figura 6.

2.2. POLÍGONO FUNICULAR POR UN PUNTO

En este caso un lado prefijado del polígono funicular de un sistema de fuerzas debe pasar por un punto del plano que contiene a dicho polígono. Supóngase, por ejemplo, que se tiene un sistema de cuatro fuerzas, cuyo tercer lado del polígono funicular debe pasar por el punto A (ver figura 7); cuando se ha trazado el polígono de las fuerzas y las líneas de proyección de sus vértices desde el polo P, se hace pasar la tercera de ellas por el punto A hasta encontrar la fuerza V_2 en $2'$ y el V_3 en $3'$. Se completa la construcción del polígono funicular a la izquierda del punto $2'$ y a la derecha del punto $3'$, trazando ordenadamente las paralelas respectivas proyectantes.

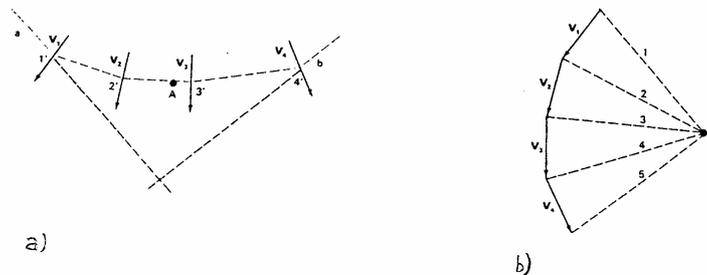


Figura 7.

2.3. POLÍGONO FUNICULAR POR DOS PUNTOS

Se tiene el sistema de fuerzas V_1, V_2, V_3, V_4 y se desea hacer pasar el primer lado y el quinto del polígono funicular, respectivamente, por los puntos A y B (ver figura 8). Inicialmente se elige un polo cualquiera P' y, con la construcción del apartado precedente, se hace pasar un polígono funicular por A. Considerando la prolongación del primer lado del polígono funicular como recta de Culmann, las prolongaciones de todos los lados homólogos de los polígonos funiculares que pueden corresponder al sistema de fuerzas planteado se hallan en puntos de dicha recta. Por tanto, prolongando los lados primero y quinto del polígono funicular hasta que se encuentren en M y uniendo M con B, bastará considerar esta recta de unión como quinto lado del polígono funicular buscado. El polo P de este último polígono funicular se halla sobre la proyectante $1'$, en el punto de intersección de la paralela a MB trazada por Z. Después de haber hallado el punto P bastará con proceder según la construcción acostumbrada y trazar el polígono funicular buscado que pasa por los puntos A y B.

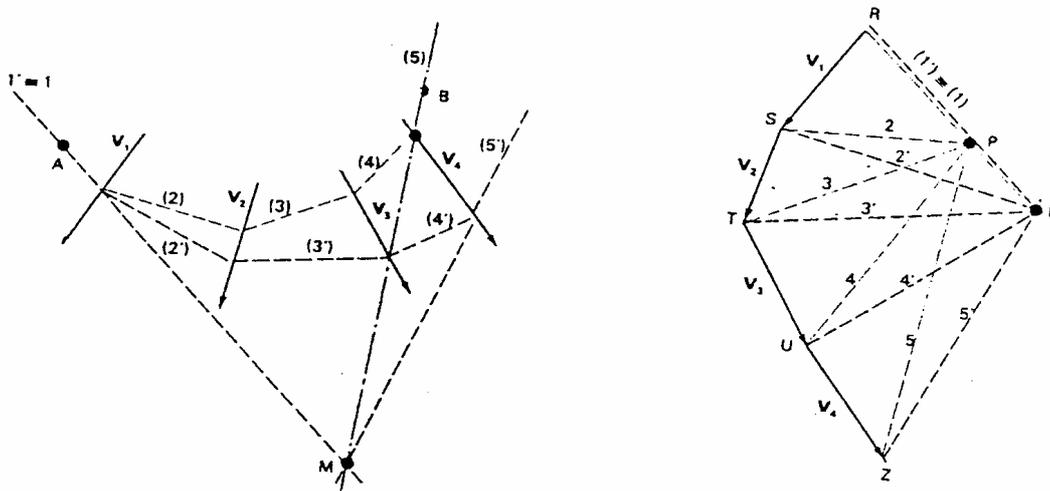


Figura 8.

2.4. POLÍGONO FUNICULAR POR TRES PUNTOS

Dado, por ejemplo, el sistema de cinco fuerzas V_1, V_2, V_3, V_4, V_5 , se desea construir un polígono funicular cuyos lados primero, cuarto y sexto pasen por los puntos A, B, y C, no alineados (ver figura 9), se une el punto B con A y con C; se proyectan desde A los puntos (1), (2) y (3) de intersección de CB con las fuerzas V_1, V_2, V_3 , y desde C los puntos (4) y (5) de intersección de AB con las fuerzas V_4 y V_5 . Por los puntos S, T y U del polígono vectorial se trazan las paralelas a CB, y por los puntos U y V las paralelas a AB. A partir de R se trazan las $1', 2'$ y $3'$, respectivamente paralelas a las rectas de proyección 1, 2, y 3, y se determina el punto H sobre la paralela a CB por el punto U; a partir de Z se trazan las $4'$ y $5'$, con lo que se determina el punto K sobre la paralela a AB por el punto U. Cuando se han obtenido los segmentos UH y UK, se completa el paralelogramo de vértices UHPK, cuyo vértice P es el polo buscado, que permite construir el polígono funicular que pasa por los puntos A, B y C.

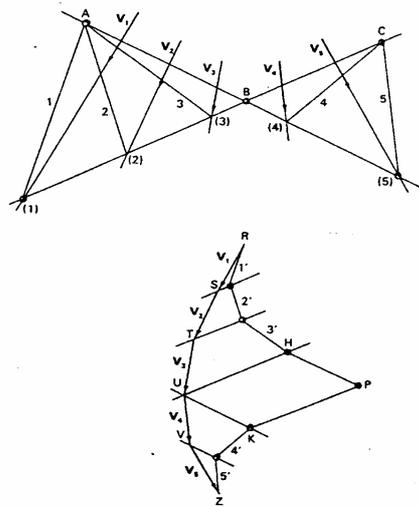


Figura 9.

2.5. DESCOMPOSICIÓN DE UN SISTEMA DE FUERZAS EN DOS

Consideremos un punto A, por el cual debe pasar la recta de acción (a), de la primera fuerza, y la recta de acción (b) de la segunda fuerza.

Suponemos un sistema de fuerzas como el de la anterior figura; se hace pasar el primer lado del polígono funicular hasta el punto A, y se procede a la construcción hasta hallar el punto B del último lado con la recta b. Desde el polo P se traza la paralela a AB hasta encontrar en H a la paralela a “b” por M; uniendo H con N, se obtiene la componente buscada que pasa por A, mientras que la componente según b está dada por el segmento HM. (Fig. 10).

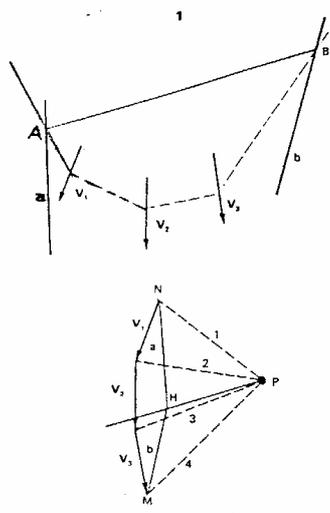


Figura 10.

2.6. DESCOMPOSICIÓN DE UN SISTEMA DE FUERZAS EN TRES

El problema es posible y determinado, en el caso en que las tres rectas de acción (a, b, c) de las fuerzas según las cuales se desea descomponer el sistema se corten dos a dos. Se utilizan dos métodos: el de Culmann y el de Ritter.

Por el método de Culmann se descompone el sistema de fuerzas, según la construcción anterior, en dos fuerzas, una de las cuales (1), denominada fuerza auxiliar, pasa por el punto A de intersección de las rectas de acción a y b, y la otra según la c; después, 1 se descompone en dos fuerzas según las rectas a y b. (Fig. 11).

Por el método de Ritter, en primer lugar se determina la resultante del sistema de fuerzas dado; se tiene en cuenta que la suma de los momentos de las tres fuerzas en las que se desea descomponer el sistema debe ser igual al momento de **R** respecto a un punto cualquiera del plano que contiene al sistema de fuerzas inicial. Para determinar la fuerza según la recta de acción "a" conviene tomar como centro de los momentos el punto O de intersección de las rectas b y c, ya que así sus momentos son nulos y no intervienen en la ecuación de equilibrio.

Análogamente se procede para conocer las fuerzas según las rectas b y c. Por ejemplo, para determinar el sentido de la fuerza que actúa según la recta a, se observa que los momentos de a y de la fuerza **R** respecto al punto O deben resultar de sentido contrario para el equilibrio; del mismo modo se determinan los sentidos de las fuerzas que actúan según b y c.

En la Fig. 12 se ha suprimido el sistema de fuerzas y se ha considerado su resultado **R**; con d_a se designa el brazo respecto al centro de O de la fuerza que actúa según la recta a; con d_r , el brazo respecto al mismo centro O de la resultante **R**; con d_r' y d_c , los brazos respecto a O' de **R** y de la fuerza que actúa según c, respectivamente; con d_r'' y d_b los brazos respecto a O'' de **R** y de la fuerza que actúa según b, respectivamente.

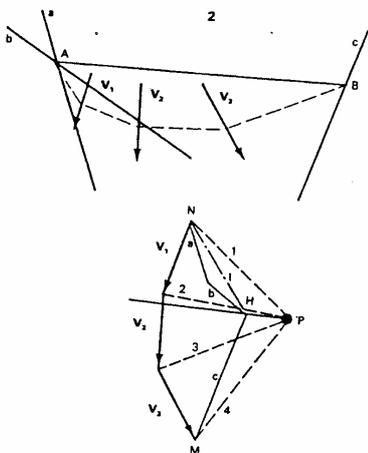


Figura 11.

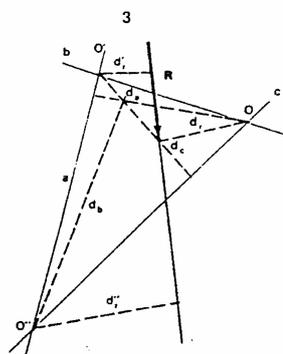


Figura 12.

3. CÁLCULO DE ESFUERZOS EN PIEZAS SIMPLES

3.1. ESFUERZOS LONGITUDINALES

3.1.1. TRACCIÓN

3.1.1.1. CARACTERÍSTICAS DE LA TRACCIÓN SIMPLE

Consideremos una barra prismática. Se produce una tracción simple, cuando la acción resultante de las fuerzas exteriores situadas a un lado de la sección transversal ideal S se reduce a una fuerza N dirigida según el eje longitudinal de la barra prismática, si ésta es recta, o según la tangente al eje geométrico en el centro de gravedad de S , si el eje es curvo (Fig. 13, a) y b)). El sentido de N es el indicado en la figura y determina alargamiento de la barra.

La deformación de la barra se traduce en que las secciones normales al eje se trasladan perpendicularmente a sí mismas, produciéndose un alargamiento igual para todas las fibras. Esta igualdad de alargamiento de todas las fibras se produce realmente si la acción exterior de la resultante N es un conjunto de fuerzas exteriores repartidas uniformemente sobre las secciones extremas (Fig. 14).

Si el sistema de fuerzas exteriores es una fuerza concentrada en el centro de gravedad de las secciones extremas (Fig. 15), la hipótesis de igual alargamiento no se verifica en los segmentos extremos de la barra y en una longitud aproximadamente igual a su mayor dimensión transversal.

Efectivamente, en el caso de fuerza N concentrada en el centro de gravedad de la sección extrema, la fibra correspondiente al eje y las próximas a ella experimentarán un alargamiento mayor que las restantes, con las que son solidarias, obligándolas también a alargarse. A partir del pequeño segmento extremo se normaliza el alargamiento que pasa a ser igual en todas las fibras.

De acuerdo con el principio de Saint-Venant y salvo la perturbación local que acabamos de señalar para los segmentos extremos, admitimos igualdad de alargamiento en todas las fibras y, por tanto, reparto uniforme de tensiones sobre la sección transversal.

Se verificará, pues:

$$N - \sigma_x \cdot S = 0 \rightarrow \sigma_x = \frac{N}{S}$$

expresión en la que S representa la superficie de la sección transversal y σ_x las tensiones normales a la misma, es decir, paralelas al eje xx .

Designamos con ε el alargamiento unitario o específico, $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$, que es adimensional por ser una relación de longitudes.

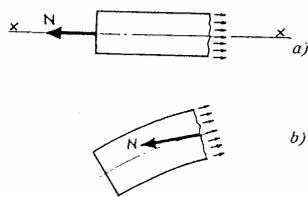


Figura 13.



Figura 14.

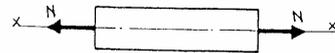


Figura 15

3.1.1.2. LEY DE HOOKE

Los ensayos experimentales demuestran que si medimos el desplazamiento de un punto de un cuerpo originado por la actuación de una fuerza creciente gradualmente, este desplazamiento crece proporcionalmente a la fuerza.

Esta proporcionalidad se pierde a partir de un valor determinado de la fuerza creciente. La citada proporcionalidad fue establecida por el físico inglés Roberto Hooke, en 1676, y constituye la ley fundamental de la Resistencia de Materiales.

Consideremos una barra prismática sometida a la acción producida por la fuerza N creciente desde cero (Fig. 16).

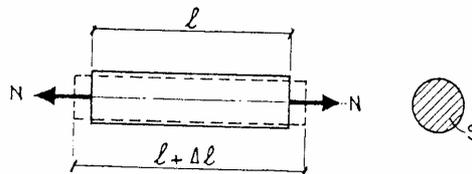


Figura 16.

La barra experimenta un alargamiento total Δl y un acortamiento transversal.

De acuerdo con la ley de Hooke, se verifica que los alargamientos unitarios crecen proporcionalmente con las tensiones unitarias:

$$\frac{\Delta l}{l} = \varepsilon = \frac{1}{E} \cdot \frac{N}{S} \rightarrow \varepsilon = \frac{1}{E} \cdot \sigma_x \rightarrow \Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot S}$$

La constante de proporcionalidad es $1/E$. El valor de E se llama módulo de elasticidad longitudinal (módulo de Young) y tiene un valor distinto para cada material.

Se tiene pues, $E = \frac{\sigma_x}{\varepsilon}$. Como ε es adimensional, las dimensiones de E son las mismas de σ_x , es decir, $\frac{F}{L^2}$.

3.1.2. COMPRESIÓN

La compresión es una sollicitación de esfuerzo longitudinal análoga a la tracción, pero con sentido contrario del esfuerzo (Fig. 17), determinando acortamiento de la barra prismática considerada.

Es el tipo de trabajo característico de las columnas o pilares que transmiten pesos en su misma dirección.

Consideramos positivo el esfuerzo longitudinal N cuando determina tracción y produce, por tanto, alargamiento $+\Delta l$ y negativo cuando se trata de compresión, originando acortamiento $-\Delta l$.

Si bien, como hemos indicado, la compresión es un fenómeno análogo a la tracción, pero de signo contrario, presenta algunas características especiales que es necesario señalar.

A diferencia de la tracción, en la compresión tiene mucha importancia la longitud de la barra en relación con las dimensiones de la sección transversal. Si la longitud es excesiva se presenta el fenómeno del pandeo.

Incluso si la longitud es pequeña, en los ensayos de probetas a compresión, tiene influencia importante la forma de la probeta.

Las probetas para ensayos de compresión de materiales pétreos (hormigones, piedras, etc.) tienen la forma de cilindro, con altura doble que el diámetro, o también la de prisma y la de cubo, elemento característico para el estudio de la Teoría de la Elasticidad.

Pues bien, con cubos de distinto lado, y cilindros de distintas dimensiones pero con la misma relación $\frac{h}{d} = 2$, se obtienen resultados distintos en los ensayos; por esta circunstancia los reglamentos fijan las dimensiones de las probetas a ensayar.

El modo de romperse presenta también características diferentes a las correspondientes a las roturas por tracción.

En los metales el ensayo de compresión es poco frecuente. Si se trata de metales dúctiles, el ensayo resulta análogo al de tracción, obteniéndose los tres periodos de proporcionalidad, fluencia y rotura (Fig. 18). El periodo de fluencia resulta menos acusado que en la tracción.

En los metales blandos (plomo, cobre, etc.) el primer periodo casi no existe, y, a veces, la fluencia de la probeta cilíndrica es tan importante que se llega a grandes deformaciones sin rotura propiamente dicha (Fig. 19).

Los hormigones y piedras rompen prácticamente sin deformación previa, y la rotura se produce por fraccionamiento en planos inclinados.

En las probetas cúbicas es corriente la rotura en pirámides, y en las cilíndricas se produce según superficies cónicas.

Para el cálculo de barras prismáticas a compresión se utilizan las mismas fórmulas que hemos visto en el caso de esfuerzo longitudinal N de tracción:

$$\sigma_x = -\frac{N}{S} \rightarrow \varepsilon = -\frac{\Delta l}{l}$$

Si no se sobrepasa el límite de proporcionalidad, es válida también la ley de Hooke:

$$\varepsilon = \frac{1}{E} \cdot \sigma_x$$

Estas fórmulas no son aplicables, como ya hemos indicado, cuando la longitud de la barra es exagerada respecto a las dimensiones de la sección transversal y aparece el fenómeno del pandeo.

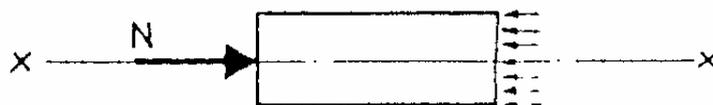


Figura 17

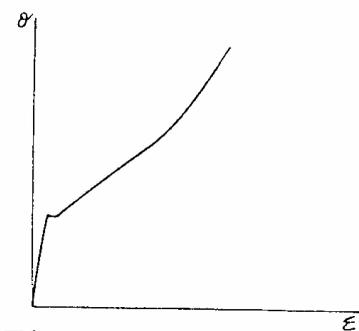


Figura 18

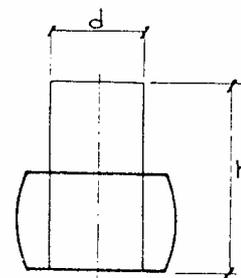


Figura 19

3.2. CORTADURA PURA O CIZALLADURA

3.2.1. GENERALIDADES

La cortadura se produce cuando la dirección de las fuerzas aplicadas a una pieza mecánica, está contenida en el plano de la sección recta de dicha pieza. A estas fuerzas se les denomina **fuerzas cortantes** y a las tensiones que provocan en dicha sección **tensiones cortantes** (Fig. 20).

Si suponemos un elemento plano rectangular sometido a tensiones cortantes y exento de tensiones normales, lo que significa que las longitudes de los lados del rectángulo no varían, se producirá una deformación consistente en una distorsión de los ángulos que en un principio eran ángulos rectos (Fig. 21).

γ es la deformación por cortante y se mide en radianes.

La deformación, γ , es proporcional a la tensión cortante que la produce pudiéndose escribir la relación:

$$\zeta = G \cdot \gamma$$

donde G , coeficiente de proporcionalidad, se denomina **módulo de rigidez o coeficiente de elasticidad transversal**, y está relacionado con el módulo de Young, E , y con el coeficiente de Poisson, μ , a partir de la expresión:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)}$$

Es decir, que la deformación, γ , producida por cortadura no sólo depende del material del cuerpo que se somete a cortadura.

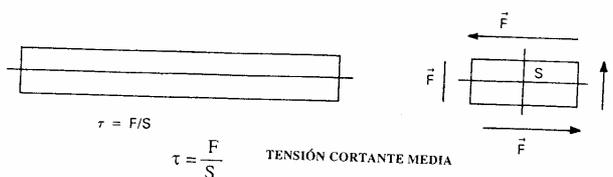


Figura 20.

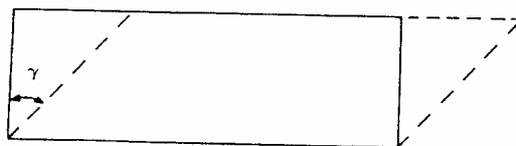


Figura 21.

3.2.2. TENSIÓN DE TRABAJO DE CORTADURA

Si se somete un cierto material a una tensión cortante pura, puede establecerse su diagrama de cortadura, es decir, una representación gráfica donde se observe la variación de la tensión de cortadura, ζ , con la deformación, γ , producida (Fig. 22). Este diagrama es análogo al de tracción y puede observarse en él el límite de proporcionalidad, A y el punto de fluencia, B. Es decir, que en la zona OA al cesar la tensión la deformación desaparece, denominándose **zona de deformación elástica**, y a partir de A, zona AB, nos encontramos en la zona de deformaciones permanentes.

Puesto que el punto de fluencia presenta una distorsión considerable, sin variación de la tensión cortante, se suele tomar como **tensión cortante de trabajo** una fracción de la tensión cortante de fluencia:

$$\zeta_t = \frac{\zeta_{fl}}{n}$$

siendo n el coeficiente de seguridad de cortadura. Si tomamos este coeficiente del mismo orden que en el caso de tracción o compresión, se obtiene que la tensión de trabajo de cortadura es 0'5-0'6 veces la tensión de trabajo de tracción, es decir, que la tensión de trabajo por cortadura es mucho menor que la tensión de trabajo de tracción.

La tensión cortante pura se presenta en la flexión de vigas y en la torsión, suponiendo una distribución uniforme de tensiones en una primera aproximación.

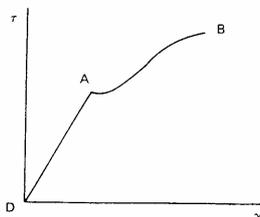


Figura 22.

3.2.3. CALCULO RESISTENTE DE PIEZAS SIMPLES: ROBLONADO

Hay estructuras o piezas de determinados mecanismos que están compuestas de varias partes que se deben unir de la forma más adecuada para que funcionen según han sido diseñadas. Cuando utilizamos materiales metálicos los medios de unión más comunes son remaches, tornillos y soldaduras, teniendo poca aplicación las uniones por bulones.

Las uniones remachadas consisten en unir dos o más piezas mediante un taladro común en el que se coloca el remache o roblón.

Un roblón es un elemento de unión formado por una espiga cilíndrica llamada caña, uno de cuyos extremos tiene una cabeza esférica, bombeada o plana (Fig.

23). El remache se introduce previamente calentando entre 900 y 1000 C, en el taladro efectuado en las piezas que se desean unir y se utiliza una máquina roblonadora de presión uniforme en el otro extremo con el fin de formar otra cabeza para asegurar el cierre.

El diámetro, d , de la caña del roblón, se hace ligeramente inferior (1 mm) al diámetro del agujero para facilitar la introducción del remache, aunque para los cálculos esta apreciación no se tomará en cuenta pues después del roblonado y posterior enfriamiento el roblón llenará por completo el agujero del taladro. La parte de la caña, l , que sobresale, con la que se va a formar la cabeza de cierre, suele tener una longitud de $4/3$ del diámetro de dicha caña correspondiente al roblón.

Las uniones atornilladas se llevan a cabo mediante piezas denominadas tornillos, que están formados, al igual que los remaches, por una caña, uno de cuyos extremos tiene una cabeza de una determinada forma y el otro está roscado. La unión se forma introduciendo el tornillo en el taladro ya preparado en las piezas que se desean unir, y colocando en el otro extremo, roscado, una tuerca y su correspondiente arandela.

Las uniones remachadas o atornilladas trabajan a cortadura cuando las fuerzas se transmiten por contacto entre las piezas que hay que unir y la caña de los roblones o tornillos y distinguiendo, a su vez, si trabajan a cortadura simple o a doble cortadura, (Fig. 24).

La tensión de cortadura será entonces del tipo: $\zeta = F/S$, tomando, para los dos casos anteriormente expuestos, la forma:

$$F = n \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} \zeta \quad \text{para cortadura simple}$$

$$F = 2 \cdot n \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} \zeta \quad \text{para cortadura doble}$$

siendo n el número mínimo de remaches o tornillos que se precisan para cada valor de ζ , y d el diámetro del agujero para remaches y tornillos calibrados, o el diámetro de la caña para tornillos ordinarios.

Como se puede observar sólo hemos supuesto el caso de una o dos filas de remaches, pues si dicho número aumenta, la tensión de cortadura en los remaches de filas diferentes ya no es la misma, estando más cargados los remaches de las filas extremas que los centrales.

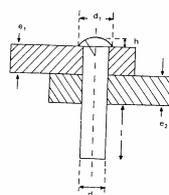


Figura 23.

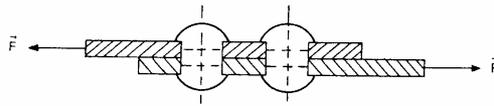


Figura 24 (a): Cortadura simple.

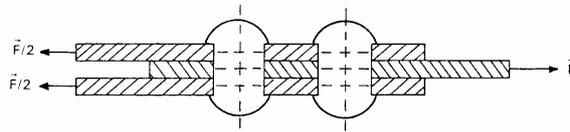


Figura 24(b): Cortadura doble.

3.3. FLEXIÓN EN LAS VIGAS SOMETIDAS A CARGAS PUNTUALES Y UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDAS

3.3.1. GENERALIDADES

Entendemos por viga una barra de un cierto material sometida a fuerzas y pares de fuerzas situados en un plano que contiene a su eje longitudinal, actuando dichas fuerzas perpendicularmente a dicho eje. Las vigas son normalmente barras prismáticas rectas y largas con una determinada sección transversal, de tal forma que proporcione la resistencia más adecuada a las deformaciones producidas por la acción de fuerzas exteriores.

Una viga puede estar sometida a fuerzas o cargas concentradas, expresadas en **N** ó **kp**, y a cargas distribuidas, expresadas en **N/m** ó **kp/m**. Si la carga por unidad de longitud es constante se dice que la carga está uniformemente repartida.

Este tipo de cargas provocan en una viga dos tipos de efectos:

- a) Deformaciones perpendiculares al eje longitudinal.
- b) Tensiones internas, normales y transversales o cortantes, y momentos internos en cada sección de la viga perpendicular a su eje.

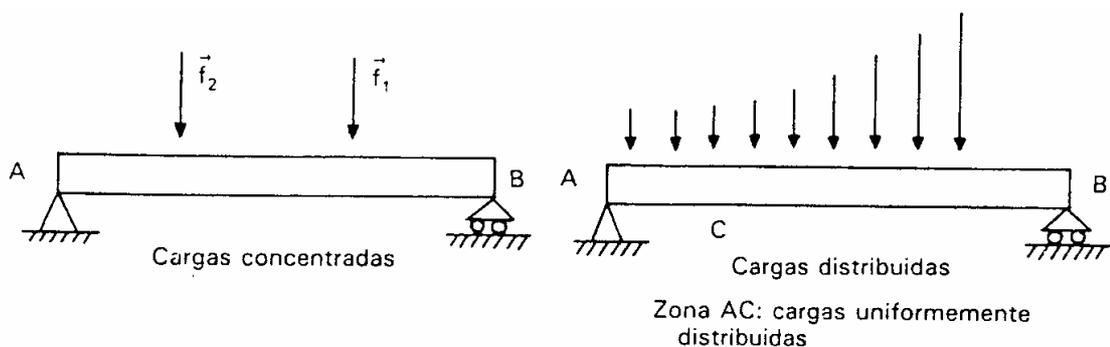


Figura 25.

3.3.2. DEFORMACIONES PERPENDICULARES AL EJE LONGITUDINAL DE LA VIGA

Supongamos una viga empotrada en una pared por un extremo y por el otro aplicamos una fuerza **F** perpendicular a su eje longitudinal. La viga se deformará (exageradamente) según la figura 26.

Este tipo de deformación se denomina **FLEXIÓN** y cuantitativamente se mide por el valor del desplazamiento vertical que experimenta el extremo libre de la viga **f**, y se denomina flecha.

Generalmente se suele considerar la flexión como el efecto combinado de dos deformaciones, una por tracción y otra por compresión. Si suponemos que la viga está compuesta por fibras según su eje longitudinal, al producirse la flexión, las fibras que se encuentran en la parte superior se alargarán mientras que las que se encuentren en la parte inferior se acortarán. Según esta suposición, existirá, evidentemente, una fibra que no sufrirá ninguna deformación, y se denomina fibra neutra que pasa por el centro de gravedad de la sección transversal de la viga.

La flexión está producida por el par formado por la fuerza **F** y la fuerza de reacción del empotramiento, determinándose la flecha o desplazamiento vertical, que es proporcional a **F**, como:

$$f = \frac{4 \cdot F \cdot l^3}{E \cdot a \cdot b^3} \rightarrow f = \frac{F \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot I}$$

donde **E** es el módulo de elasticidad de la viga e **I** el momento de inercia de la sección, rectangular, respecto al eje neutro, $I = \frac{a \cdot b^3}{12}$. Cuando la viga flexa por su propio peso, **p**, supuesto uniformemente repartido, se encuentra para la flecha el valor:

$$f = \frac{p \cdot l^4}{8 \cdot E \cdot I}$$

A partir de estas expresiones podemos observar que la flecha, **f**, será pequeña si la altura, **b**, de la sección rectangular de la viga es grande, es decir, que interesa que la mayor parte de la masa de la viga se encuentre alejada de la fibra neutra o eje neutro. Y como parece lógico, la flecha dependerá del material utilizado, **E**.

Consideremos ahora una viga simplemente apoyada como se muestra en la figura 27, y apliquemos una carga o fuerza exterior **F**. La viga se deformará adoptando una figura que se conoce con el nombre de **curva elástica**.

El desplazamiento, **y**, es la flecha de la viga y, generalmente, será necesario determinar su valor para cada valor de **x** a lo largo de la viga.

En el caso particular en que la fuerza **F** esté aplicada en el punto medio de la viga (Fig. 28), se puede obtener una relación para el valor de la flecha

máxima, que lógicamente estará situada en el centro de la viga, debido a la simetría del problema:

$$y_{\text{máx}} = \frac{F \cdot L^3}{48 \cdot E \cdot I}$$

siendo L la longitud total de la viga, F la fuerza o carga exterior, E el módulo de elasticidad de la viga e I el momento de inercia de la sección respecto al eje neutro.

La importancia de las flechas de las vigas viene marcada por imponer las condiciones de diseño, es decir, es esencial conocer el valor de las flechas para imponer limitaciones en las mismas, de tal manera que una viga bien diseñada sea capaz de soportar cargas o fuerzas exteriores y además no deberá sufrir flechas demasiado grandes.

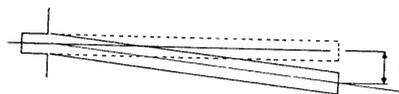
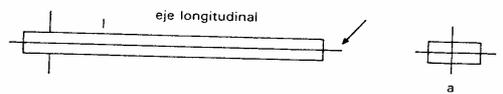


Figura 26.



Figura 27.

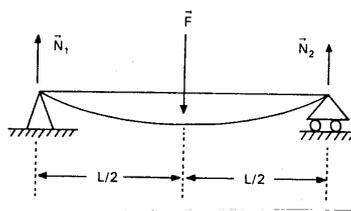


Figura 28.

3.3.3. FUERZAS Y MOMENTOS INTERNOS: FUERZA CORTANTE Y MOMENTO FLECTOR

Cuando una viga está sometida a cargas y pares externos se producen tensiones internas cuyos valores dependen de la distribución de estas cargas o pares. En general existirán dos tipos de tensiones, es decir, tensiones normales, σ , y tensiones transversales o cortantes, ζ .

Como en cada sección de la viga estas tensiones son diferentes, para determinar su valor será necesario conocer la fuerza y el momento resultante que actúan en dichas secciones aplicando las condiciones de equilibrio.

Supongamos una viga simplemente apoyada como se indica en la figura 29, y se desea estudiar las tensiones internas en una sección cualquiera de la viga, por ejemplo en la sección C situada a una distancia x del extremo A.

En primer lugar se deben obtener las fuerzas correspondientes a las reacciones en los apoyos, empleando las condiciones de equilibrio y considerando la viga completa como un sólido libre.

Para determinar las fuerzas interiores en C, cortamos la viga en este punto y dibujamos el diagrama del sólido libre de una de las partes resultantes, por ejemplo la de la izquierda, AC. La parte suprimida deberá sustituirse por una fuerza y un par cuyo efecto sea el mismo que el que producía la otra parte de la viga. Este efecto consiste en una fuerza vertical cortante, F , junto con un par, M .

Es decir, que esta fuerza y este par junto con las fuerzas exteriores, f_1 , f_2 y N_A , mantienen en equilibrio la parte izquierda de la viga.

Aplicando las condiciones de equilibrio al sólido libre AC, calcularemos los valores de la fuerza F , **fuerza cortante** igualando a cero las componentes verticales de todas las fuerzas que actúan sobre AC, y del mismo modo el par M , **momento flector**, igualando a cero los momentos respecto de C de todas las fuerzas y pares que actúan sobre AC.

1ª Condición de equilibrio.

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow -f_1 - f_2 + N_A - F = 0$$

$$\text{Fuerza cortante: } F = -f_1 - f_2 + N_A$$

2ª Condición de equilibrio.

$$\Sigma M_C = 0 \rightarrow -N_A \cdot x + f_1 \cdot (x - x_1) + f_2 \cdot (x - x_2) + M = 0$$

$$\text{Momento flector: } M = N_A \cdot x - f_1 \cdot (x - x_1) + f_2 \cdot (x - x_2)$$

A partir de los valores, así determinados, de la fuerza cortante y el momento flector, estaremos en condiciones de evaluar las tensiones, normales y cortantes, que se producen en cualquier sección de la viga considerada.

Tensiones normales: Supongamos una sección cualquiera de una viga (Fig. 30), que está sometida a un cierto momento flector M . En dicha sección se producirán tensiones normales, σ , de valor diferente dependiendo de su posición relativa respecto al eje neutro. Si consideramos una fibra que dista una distancia y del eje neutro, es posible encontrar una relación para la tensión normal, σ , sobre dicha fibra. M es el momento flector en dicha sección e I el momento de inercia de la sección respecto al eje neutro. Estas tensiones varían desde cero en el eje neutro hasta un valor máximo en las fibras exteriores.

Reconsiderando la anterior expresión para la tensión, σ , se puede expresar de la forma:

$$\sigma = \frac{M}{I/y}$$

llamándose a la relación I/y , **módulo de la sección** o **módulo resistente**, representándose por W .

$$\sigma = \frac{M}{W}$$

La ventaja que nos proporciona esta expresión consiste en que en la mayoría de los manuales de construcción sobre la forma de los perfiles estructurales (forma de la sección recta de la viga) se encuentran los valores de W , es decir, que a partir del valor de W y utilizando estas tablas o manuales, se puede conocer el tipo de perfil correspondiente.

Tensiones transversales o cortantes: Cuando una viga esta sometida a una fuerza cortante en una cierta sección, se producen tensiones cortantes verticales y horizontales en dicha sección, siendo la resultante de las fuerzas cortantes verticales la **fuerza cortante F**. En la figura 31 se representa la sección transversal de la viga, donde el plano vertical de simetría contiene al eje neutro que pasa por su centro de gravedad. Siendo posible encontrar una expresión para determinar la tensión cortante, ζ , en todas las fibras a la distancia y del eje neutro de cada sección de la viga:

$$\zeta = \frac{F}{I \cdot b} \cdot S$$

donde S es el momento estático del área rayada de la sección transversal respecto del eje neutro, cuyos valores constan en las tablas normalizadas de los diferentes perfiles o formas de las secciones.

En el caso particular de una viga de sección rectangular, la anterior expresión toma la forma:

$$\zeta = \frac{F}{2 \cdot I} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

donde F es la fuerza cortante, I el momento de inercia de la sección respecto al eje neutro, h la altura de la sección de la viga, y la distancia de una fibra determinada respecto al eje neutro y, por lo tanto, ζ , la tensión cortante en una cierta fibra que dista y del eje neutro englobando tanto las tensiones cortantes verticales como horizontales. De esta expresión podemos concluir que la tensión de cortante, ζ , es máxima en el eje neutro y nula en las fibras externas.

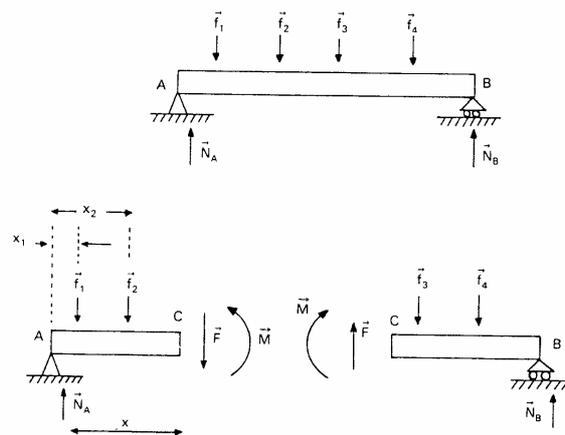


Figura 29.

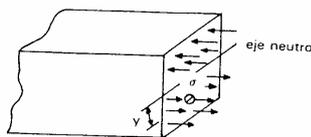


Figura 30.

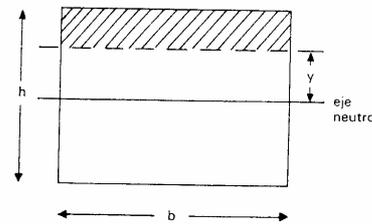


Figura 31.

3.4. TORSIÓN PURA

Si consideramos una pieza de sección circular con uno de sus extremos sujeto rígidamente y el otro sometido a un par de fuerzas \mathbf{M} , se producirá una cierta deformación denominada **TORSIÓN** (Fig. 32).

Si el momento resultante tiene la dirección del eje perpendicular a la sección recta de la pieza se denomina **MOMENTO TORSOR**; en caso contrario el momento torsor sería la componente, según dicho eje, del momento resultante que actúa sobre la pieza. De esta forma diremos que dicha pieza está sometida a **TORSIÓN SIMPLE O PURA** cuando el momento en cualquier sección de la pieza coincide con el momento torsor.

Los efectos que produce la aplicación de este par de fuerzas son de dos clases:

a) Provoca un desplazamiento angular de la sección de un extremo respecto de la del otro (Fig. 33).

Si consideramos una generatriz AB de la pieza cilíndrica, después de la torsión se transforma en una hélice A'B, es decir, que todos los puntos de dicha generatriz describen arcos excepto B.

b) Origina tensiones cortantes en las secciones perpendiculares a su eje (Fig. 34).

Dichas tensiones serán máximas en la periferia de la sección y mínimas en su centro.

En la teoría elemental de la torsión se admite que en una pieza mecánica sometida a torsión pura las secciones permanecen planas y la deformación se reduce a una rotación de las diferentes secciones alrededor de un eje perpendicular a dichas secciones; consiguiéndose buenos resultados en el estudio de piezas cuya sección recta sea un círculo o una corona circular (árboles macizos y huecos).

Si consideramos el esquema de la figura 33, la deformación máxima se produce en la base de la derecha de la pieza considerada y viene definida por el ángulo de giro γ , denominado **ángulo de torsión**, que es el ángulo de giro total de los extremos de la barra cilíndrica.

Esta deformación global consistiría en un desplazamiento relativo entre cada dos secciones próximas entre sí, sometidas a tensiones de cortadura, cuyas direcciones están contenidas en el plano determinado por las secciones rectas de la pieza (Fig. 35).

El punto A de la sección S pasaría, después de la deformación a la posición indicada como A', y utilizando sencillas relaciones entre ángulo, arco y radio, es fácil expresar las relaciones:

$$\gamma = \frac{\text{arco}AA'}{\text{radio}BA} = \frac{r \cdot \Delta\theta}{\Delta l}$$

siendo γ el ángulo de deformación por cortante, y por lo tanto la tensión de cortadura se suele expresar como:

$$\zeta = G \cdot \gamma = \frac{r \cdot \Delta\theta}{\Delta l} \cdot G$$

y como r es la posición, respecto del centro de la sección circular, del punto considerado para estudiar la deformación, la tensión por cortante será entonces máxima cuando r alcance su máximo valor, es decir, R el radio de la sección:

$$\zeta_{\text{máx}} = \frac{R \cdot \Delta\theta}{\Delta l} \cdot G$$

Por otra parte, el momento torsor, que es quién provoca la deformación total de la pieza será entonces el momento total debido a las fuerzas cortantes en toda la sección:

$$M = \int_0^R f \cdot r = \int_0^R \zeta \cdot ds \cdot r = \int_0^R \frac{r \cdot \Delta\theta}{\Delta l} \cdot G \cdot ds \cdot r = G \cdot \frac{\Delta\theta}{\Delta l} \int_0^R r^2 \cdot ds$$

$$M = \frac{\pi \cdot R^4}{2} \cdot \frac{\Delta\theta}{\Delta l} \cdot G$$

es decir, que el ángulo de torsión es proporcional al momento torsor:

$$M = k \cdot \theta$$

donde k es una constante de proporcionalidad que depende de las dimensiones de la pieza y del módulo de rigidez, G , del material:

$$k = \frac{\pi \cdot R^4}{2 \cdot l} \cdot G$$

Para terminar esta introducción a la torsión podemos establecer una relación entre el momento torsor y la tensión máxima de cortadura. Dado que la tensión de cortadura y el momento torsor se pueden expresar como:

$$\zeta_{\text{máx}} = \frac{R \cdot \Delta\theta}{\Delta l} \cdot G$$

$$M = \frac{\pi \cdot R^4}{2} \cdot \frac{\Delta\theta}{\Delta l} \cdot G$$

$$\zeta_{\text{máx}} = \frac{2 \cdot M}{\pi \cdot R^3}$$

y como el momento de inercia de la sección circular es $I_0 = \frac{1}{2} \cdot S \cdot R^2$, tendremos:

$$\zeta_{\text{máx}} = \frac{M}{I_0} \cdot R$$

a la expresión $\frac{I}{R}$ se le suele llamar **módulo resistente a la torsión de la sección** y se representa por $W(\text{L}^3)$

$$\zeta_{\text{máx}} = \frac{M}{W}$$

de manera análoga podemos obtener una expresión para el ángulo de torsión θ :

$$\theta = \frac{M}{G \cdot I_0} \cdot l$$

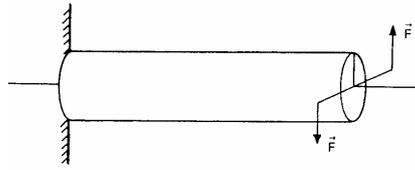


Figura 32.

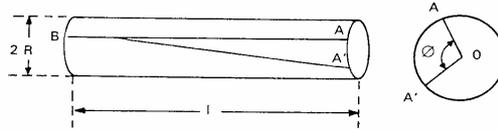


Figura 33.

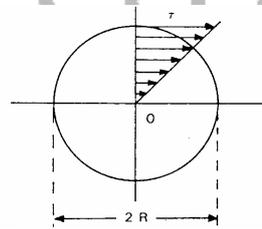


Figura 34.

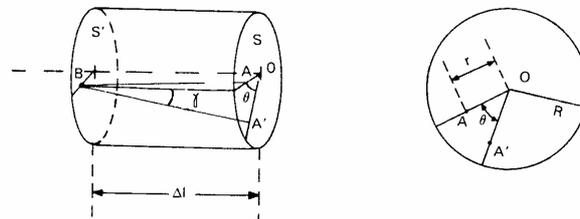


Figura 35.

BIBLIOGRAFÍA

- GÓMEZ DEL CAMPO, J.C.: *Mecánica*. Madrid. Paraninfo. 1995.
- NASH, WILLIAM A.: *Resistencia de materiales*. México. Mc Graw-Hill, serie SCHAUM. 1969.
- RODRÍGUEZ-AVIAL AZCUNAGA, FERNANDO: *Resistencia de Materiales*. Dossat. 1982.
- TIMOSHENKO, S.P.; YOUNG D.H.: *Teoría de las estructuras*. México. Elcano. 1985.

