ARAGÓN 2014

OPCIÓN 2- EJERCICIO 2

Un punto fijo P (p,q) pertenece a la gráfica de $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$ **con a>0. La recta tangente a dicha curva en el punto P corta a los ejes en los puntos (0, m) y (n, 0). Comprobar que** $m+n=a$

SOLUCIÓN.

Derivamos la igualdad $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ **y obtenemos** $\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x}}+\frac{y'}{\cancel{2}\sqrt{y}}=0\leftrightarrow y'=-\sqrt{\frac{y}{x}}$

La recta tangente en P tendrá ecuación $y-q=-\sqrt{\frac{q}{p}}(x-p)$**. Calculamos los cortes con los ejes de coordenadas:**

$$x=0\rightarrow y-q=-\sqrt{\frac{q}{p}}(0-p)\rightarrow y=q+p\sqrt{\frac{q}{p}}=\boxed{q+\sqrt{pq}=n}\,(1)$$

$$y=0\rightarrow 0-q=-\sqrt{\frac{q}{p}}(x-p)\rightarrow x=p+q\sqrt{\frac{p}{q}}=\boxed{p+\sqrt{pq}=m}\,(2)$$

Como P pertenece a la curva, verifica su ecuación, y en consecuencia, $\sqrt{p}+\sqrt{q}=\sqrt{a}$**. Si elevamos al cuadrado la igualdad,** $\left(\sqrt{p}+\sqrt{q}\right)^2=\left(\sqrt{a}\right)^2\leftrightarrow p+q+2\sqrt{pq}=a$**.**

Sumando (1) + (2), obtenemos que $m+n=p+q+2\sqrt{pq}=a$, por lo que el enunciado del ejercicio se verifica.