PRIMERA PRUEBA. PARTE A. PRÁCTICA

El aspirante realizara, integro, el EJERCICIO 1 o el EJERCICIO 2

EJERCICIO 1

1.1.- Calcular el siguiente determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{1!} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{1}{2!} & \frac{1}{1!} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & \frac{1}{1!} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{(n-1)!} & \frac{1}{(n-2)!} & \frac{1}{(n-3)!} & \dots & \frac{1}{1!} & 1 \\ \frac{1}{n!} & \frac{1}{(n-1)!} & \frac{1}{(n-2)!} & \dots & \frac{1}{2!} & \frac{1}{1!} \end{vmatrix}$$

1.2.- Determinar una función $f(x)$ definida en $[0\,,2]$ y derivable que verifique:

$$3\int_0^x f(t)dt = (f(x) + 2\,f(0)).x$$

y para la que

$$f(1) = 1\,, f(2) = 7$$

1.3.- Se tienen dos semicircunferencias iguales que hacen contacto una con otra de modo que sus diámetros se encuentran en una misma recta. Trazamos a éstas una tangente común e inscribimos una circunferencia que haga contacto con esta tangente y las dos semicircunferencias dadas; luego, inscribimos una segunda circunferencia que haga contacto con la primera y las dos dadas, a continuación trazamos una tercera circunferencia que haga contacto con la segunda y las dos dadas y así sucesivamente hasta el infinito. Utilizando esta construcción, demostrar que, cuando ***n*** aumenta inconmensurablemente, la suma

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \cdots + \frac{1}{n.(n+1)}$$

tiende a la unidad.

1.4.- Una caja contiene bolas blancas y negras. Si se extraen dos bolas al azar la probabilidad de que sean blancas es $\frac{1}{2}$. Se pide:

a) Determinar el número mínimo de bolas que tiene la caja

b) Determinar el número mínimo de bolas que tiene la caja si el número de bolas negras es par.

EJERCICIO 2

2.1.- Se tienen ***n*** recipientes cilíndricos iguales. El primero se llena por completo de alcohol y los demás hasta la mitad de una mezcla de alcohol con agua, con la particularidad de que la concentración de alcohol en cada recipiente es ***k*** veces menor que en el anterior. Con el contenido del primer recipiente se llenó hasta los bordes el segundo, después con el contenido del segundo, el tercero y así sucesivamente hasta el último. Hallar la concentración de alcohol obtenida en el último recipiente.

2.2.- Un punto fijo ***P (p,q)*** pertenece a la gráfica de $x^{1/2} + y^{1/2} = a^{1/2}$ con *a*>0. La recta tangente a dicha curva en el punto ***P*** corta a los ejes en los puntos (0, *m*) y (*n*, 0). Comprobar que *m* + *n* = *a*

2.3.- *ABCD* es un cuadrilátero inscrito en una circunferencia de radio 1 de modo que AB es un diámetro y el cuadrilátero admite circunferencia inscrita. Probar que $CD \leq 2\sqrt{5} - 4$

2.4.-Se eligen dos puntos aleatoria e independientemente de un segmento de longitud unidad, resultando dividido en tres nuevos segmentos. Hallar la probabilidad de que:

a) Cada uno de ellos tenga una longitud mayor o igual que $\frac{1}{4}$

b) Se pueda formar un triángulo rectángulo con ellos como lados.