



**TEMA 54**

**LAS CÓNICAS COMO SECCIONES PLANAS DE UNA SUPERFICIE  
CÓNICA**

**ESTUDIO ANALÍTICO**

**PRESENCIA EN LA NATURALEZA, EL ARTE Y LA TÉCNICA**

- 1. INTRODUCCIÓN**
- 2. LAS CÓNICAS COMO SECCIONES PLANAS DE UN CONO.**
- 3. ESTUDIO ANALÍTICO.**
  - 3.1. CIRCUNFERENCIA.**
  - 3.2. ELIPSE.**
  - 3.3. HIPÉRBOLA.**
  - 3.4. PARÁBOLA.**
  - 3.5. LUGARES DESCRITOS POR UN POLINOMIO DE SEGUNDO GRADO EN DOS INDETERMINADAS.**
- 4. LAS CÓNICAS EN LA NATURALEZA, EL ARTE Y LA TÉCNICA.**
- 5. APÉNDICES Y LÁMINAS.**



## 1. INTRODUCCIÓN.

Las cónicas tienen su origen en la Geometría Helénica, concretamente en el intento de resolución de uno de los tres problemas clásicos planteados en el siglo IV AC.: el problema de Delos, o de la duplicación del cubo.

La Geometría griega planteó tres problemas a resolver mediante la utilización de regla y compás exclusivamente: la cuadratura del círculo, o dado un círculo, construir un cuadrado con la misma área, la trisección de un ángulo, o dado un ángulo, construir dos rectas que lo dividan en tres ángulos iguales, y la duplicación del cubo, o sea, dado un cubo, construir otro con el doble de volumen. Los tres problemas fueron irresolubles, como demostró a la postre Descartes, al comprobar que todo problema de construcción con regla y compás era reducible a la resolución de una ecuación polinómica de primer o segundo grado con coeficientes racionales. Estos problemas nos llevan a ecuaciones trascendentes en los dos primeros casos, y a una ecuación de tercer grado en el último, por lo que nunca se resolvieron.

Sin embargo, dieron pie a la construcción de una infinidad de nuevas curvas, que generaron a su vez un alud de nuevos descubrimientos. Entre estas curvas están las trisectrices de Hippias, las espirales de Arquímedes, y las cónicas de Menecmo.

Al estudiar a fondo el problema de la duplicación del cubo se llegó a la conclusión, expresada en lenguaje actual, de que si se encontraban y construían curvas que cumpliesen la propiedad  $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$ , entonces el problema estaba resuelto.

Menecmo, discípulo de Eudoxo de Cnido, encontró estas curvas a partir de las secciones planas de diversos conos, por lo que la duplicación del cubo se hubiese resuelto si se hubiesen podido construir estas curvas con regla y compás. Esto resultó imposible, naturalmente.

La cumbre del estudio helénico de estas curvas llegó con Apolonio de Rodas en el siglo III AC., estudio que plasmó en su magnífica obra en 8 volúmenes, "Las cónicas". Esta obra se conserva completa gracias a la traducción del griego al árabe realizada por Tabit ibn Qurra.

Apolonio es el que da su nombre a las cónicas, obteniéndolas no por la sección de diversos conos como Menecmo, sino a partir de secciones planas de un único cono de doble hoja, ya sea recto u oblicuo. Después de dar el método de construcción por disección hace un estudio planimétrico de cada una de las curvas, prescindiendo completamente del cono. Este estudio llega a tal profundidad que queda a las puertas de la Geometría Analítica, pues estudia relaciones entre distancias planas absolutamente semejantes a la obtención actual de una ecuación de una curva. También busca y encuentra condiciones necesarias y suficientes que deben cumplir los puntos de una cónica para formar parte de ella, estudia los diámetros conjugados, el lugar geométrico de tres y cuatro rectas cuyas distancias están en ciertas proporciones, las intersecciones de cónicas, máximos, mínimos, tangentes y normales, evolutas, involutas y focos.



Estas curvas, que nacen de un mero desafío intelectual, tendrían luego aplicaciones en multitud de campos, como las trayectorias de proyectiles, la astronomía, la navegación espacial y la cartografía estereográfica.

Un estudio tan completo como este no recibió nuevas aportaciones hasta el siglo III DC. Gracias a “La colección” de Pappus de Alejandría, que presentaba algunos nuevos teoremas de escasa relevancia. Con la desaparición del imperio romano y la cultura clásica, las cónicas no vuelven a entrar en escena hasta que en 1522, Johannes Werner publica unos “Elementos de las cónicas”, donde redescubre las “ecuaciones” estereométricas de dichas curvas. El estudio es algo burdo, pero tiene el mérito de ser propio: Werner desconocía completamente la obra de Apolonio.

Con la imperiosa necesidad renacentista de dar perspectiva a las obras artísticas en el campo de la pintura, aparecen una serie de artistas-matemáticos que consiguen aplicar las cónicas a estos intereses con éxito. Entre ellos destacan Durero, Alberti, y della Francesca.

Otro campo que encuentra una aplicación práctica de las cónicas es la cartografía, con Peter Apian, y Gerard Mercator (1512-1594), que aplican la proyección cilíndrica a la construcción de mapas, con lo que mejoran notablemente la calidad de estos al eliminar las fuertes deformaciones producidas en la proyección plana de la esfera, según nos alejamos del ecuador. Esto se tradujo en una importante mejora de las cartas de navegación, absolutamente necesaria para la época.

La astronomía también sufre un fuerte impulso, gracias al descubrimiento de Kepler de que las órbitas de los planetas son elípticas, y la aplicación de las propiedades de éstas a los cálculos astronómicos. Sus descubrimientos se publicaron en la obra “Astronomía Nuova” en 1609.

El último y fuerte impulso al estudio de las cónicas viene de la mano de la Geometría Analítica, creada por Descartes y Fermat en el siglo XVII. La primera expresión de la ecuación general de una cónica aparece ya en “La Geometrie” de Descartes, y en los estudios de los lugares geométricos de Fermat. Este nuevo punto de vista algebraico, hasta entonces desconocido, provoca un alud de nuevos teoremas sobre cónicas.

Más adelante, en el siglo XIX, Girard Desargues completaría la aplicación de las cónicas al estudio de la perspectiva, pues fue el verdadero creador de la Geometría Proyectiva, por su interés para la ingeniería. Inspirado por “Las cónicas” de Apolonio, utilizando las técnicas de la Geometría Analítica, y buscando su aplicación a la ingeniería, hizo un completísimo estudio de las propiedades y relaciones de las formas al proyectarlas sobre diversas superficies.

En los capítulos siguientes desarrollaremos los aspectos teóricos más elementales de estas curvas, su obtención por secciones planas de un cono y su presencia en la Naturaleza, el Arte y la Técnica.

## 2. LAS CÓNICAS COMO SECCIONES PLANAS DE UN CONO.



## 2.1 OBTENCIÓN DE LAS CÓNICAS.

Al girar una recta en torno a un eje, también recto, se generan tres superficies diferentes, según la posición relativa de la recta que gira o generatriz y el eje:

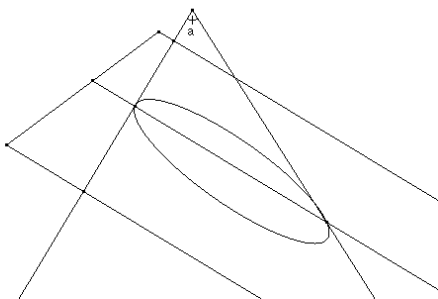
1. Si la generatriz y el eje se cruzan, obtenemos un hiperboloide de una hoja, que también se genera al girar una hipérbola alrededor del eje de simetría que no la corta.
2. Si la generatriz y el eje son paralelos, obtendremos un cilindro.
3. Si la generatriz y el eje se cortan, obtendremos un cono de doble hoja con vértice en el punto de corte.



## 2.2 EL MÉTODO DE MENECCMO.

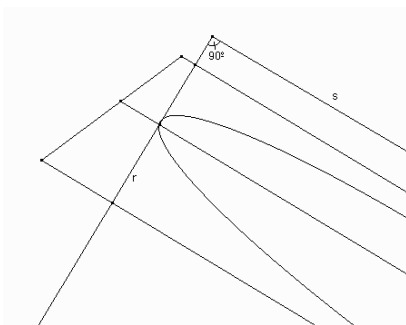
Menecmo obtenía las cónicas a partir de la intersección de un cono de una hoja con un plano perpendicular a una generatriz. Para ello, consideraba previamente la intersección del cono con un plano que contuviese al eje. Este plano corta la superficie del cono en dos rectas coplanarias que forman un ángulo  $\alpha$ , teniéndose en cuenta tres casos posibles:

### 1. $\alpha < 90^\circ$



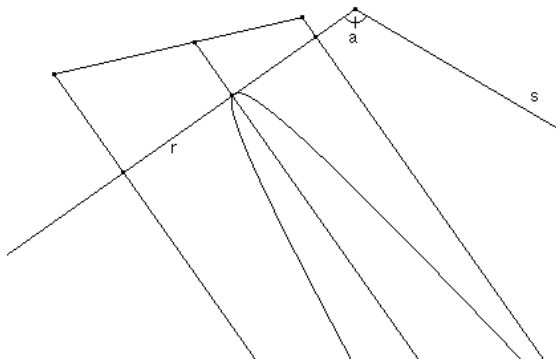
Al ser  $\alpha < 90^\circ$  y el corte perpendicular a la generatriz, el plano cortará a la otra generatriz coplanaria de la primera, dando lugar a una curva cerrada que se denomina **elipse**.

### 2. $\alpha = 90^\circ$



Al ser las generatrices  $r$  y  $s$  perpendiculares, el plano de corte es paralelo a  $s$ , con lo que se genera una curva abierta al intersectar el plano con el cono. Esta curva se llama **parábola**.

### 3. $\alpha > 90^\circ$



llama **hipérbola**.

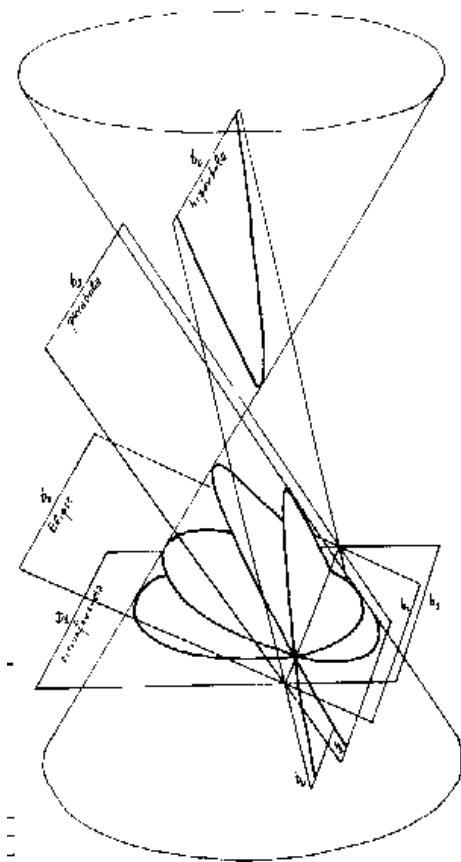
Al ser  $\alpha > 90^\circ$  se genera, como en el caso anterior una curva abierta. Pero tiene una característica fundamentalmente distinta: La distancia entre las dos ramas tiende a estabilizarse en este caso, mientras que en la parábola las ramas se separan indefinidamente. Esta propiedad la estudiaremos mejor en el siguiente apartado.

La nueva curva generada en este caso, se

### 2.3 MÉTODO DE APOLONIO.

Apolonio mejora el método de construcción de las cónicas de Menecmo, en cuanto que las genera todas a partir de un único cono de doble hoja, variando el ángulo de intersección del plano con la generatriz. Con ello consigue que la hipérbola tenga dos ramas simétricas separadas, y además incluye la circunferencia como caso particular de la elipse.

Veamos los distintos casos:

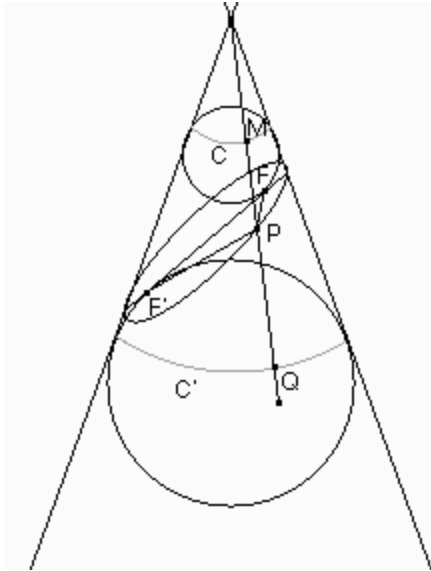


1. Si el plano corta a todas las generatrices del cono ( $b_1$  y  $b_2$ ), la curva intersección es una elipse. En el caso particular en que el corte es perpendicular al eje del cono, esta elipse es una circunferencia.
2. Si el plano es paralelo a una generatriz ( $b_3$ ), o sea, las corta a todas menos a ésta, la curva obtenida es una parábola.
3. Si el plano corta a todas las generatrices excepto a dos, a las que es paralelo ( $b_4$ ), la intersección es una hipérbola, curva que ahora presenta dos ramas separadas, a diferencia de lo que ocurría con el método de Menecmo.

### 2.4 LAS CÓNICAS COMO LUGARES GEOMÉTRICOS.

**LA ELIPSE.**

El siguiente paso dado por Apolonio para el estudio de las cónicas, es buscar una definición de las mismas que le permita prescindir del cono, basándose exclusivamente en sus propiedades planas, es decir, busca y encuentra un modo de definir las como lugares geométricos en el plano. Esto consiste en encontrar condiciones necesarias y suficientes que cumplan los puntos que forman la curva. Veamos como conseguirlo.



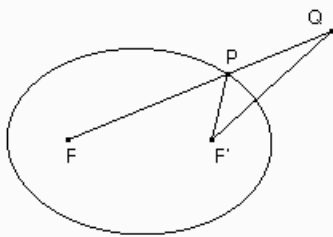
Partimos de una elipse cualquiera generada en un cono. Consideramos dos esferas tangentes al cono y al plano de la elipse. Los puntos de tangencia con este plano serán  $F$  y  $F'$ . Los puntos de tangencia con el cono determinan dos circunferencias sobre las esferas,  $C$  y  $C'$ .

Dado un punto  $P$  de la elipse, trazamos la generatriz del cono que pasa por él. Esta recta corta a  $C$  en el punto  $M$  y a  $C'$  en el punto  $Q$ .

$PQ$  es tangente a la esfera inferior, y  $PF'$  también lo es, por lo que se cumple que  $PQ = PF'$ . Razonando igual con la esfera superior y los

puntos  $P$ ,  $F$  y  $M$ , tenemos que  $PM = PF$ . Como  $M$ ,  $P$ ,  $Q$  están alineados, esto significa que  $PF + PF' = PM + PQ = MQ$ , que es una constante que no depende del punto  $P$  elegido. Por tanto, si  $P$  es un punto de la elipse cualquiera, cumple que la suma de distancias desde él hasta los puntos fijos  $F$  y  $F'$  es constante.

Veamos ahora que esta condición es también suficiente:



Si  $Q$  es un punto exterior a la elipse, situado en el mismo plano, unimos mediante segmentos dicho punto con  $F$  y  $F'$ . Ambos segmentos cortan a la elipse.

Sea uno de los puntos de corte,  $P$  alineado con  $Q$  y  $F$ . Entonces:

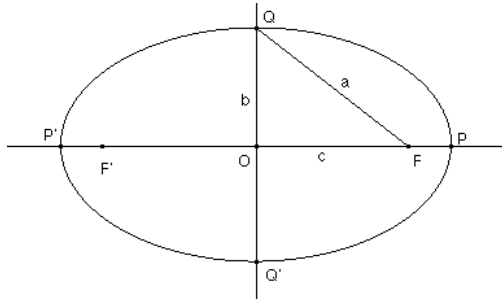
$QF + QF' = QP + QF' + PF > PF' + PF$ , por ser la suma de los lados  $QP$  y  $QF'$  del triángulo  $QPF'$  mayor que el tercer lado.

Con un razonamiento análogo se puede demostrar que si  $Q$  es un punto interior  $QF + QF' < PF + PF'$ , donde  $P$  es un punto de la elipse.

Por tanto, podemos enunciar: **La elipse es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos, es constante.**



Si llamamos a  $F$  y  $F'$  focos de la elipse, vamos a determinar cual es el valor de esta constante en función de la recta que pasa por ellos.



Sean  $P$  y  $P'$  las intersecciones de la recta  $FF'$  con la elipse, según la figura. Entonces:

(1)  $PF + PF' = P'F' + P'F$ , según acabamos de demostrar. Pero:

(2)  $PF' = PF + FF'$ ,  $P'F = P'F' + FF'$

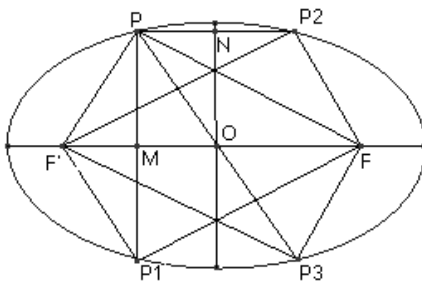
Sustituyendo (2) en (1):

$2PF + FF' = 2P'F' + FF' \Rightarrow PF = P'F' \Rightarrow PF + PF' = P'F' + P'F = PF + FF' + F'P' = PP'$ , por lo que si llamamos  $2a$  a la distancia  $PP'$  tenemos que la suma de distancias a los focos desde un punto cualquiera de la elipse es  $2a$

Consideremos ahora la mediatriz de  $PP'$ , que corta a la elipse en  $Q$  y  $Q'$ . Sean las distancias  $OQ = b$ ,  $OF = OF' = c$ . Como  $QF + QF' = 2a$  y  $QF = QF'$  por estar  $Q$  en la mediatriz de  $FF'$ , tenemos que  $2QF = 2QF' = 2a \Rightarrow QF = QF' = a$

Como consecuencia, los triángulos rectángulos  $QOF$ ,  $QOF'$ ,  $Q'OF$ ,  $Q'OF'$  son iguales y sus lados miden  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , si llamamos  $b = QO = Q'O$ . Entonces,  $a^2 = b^2 + c^2$ .

Por otra parte, es elemental comprobar que la elipse es simétrica respecto de las rectas  $FF'$  y  $QQ'$ , así como del punto  $O$ .



Dado un punto  $P$  cualquiera de la elipse, consideramos sus simétricos  $P_1$ ,  $P_2$  y  $P_3$ , como indica la figura. Es evidente que los triángulos rectángulos  $PF'M$  y  $P_1F'M$  son iguales, ya que el cateto  $F'M$  es común y  $PM = P_1M$  por simetría. Por tanto,  $PF' = P_1F'$ .

Razonando de modo semejante, llegamos a la conclusión de que  $PF = P_1F$ , por lo que  $P_1$  pertenece a la elipse, al ser la suma de

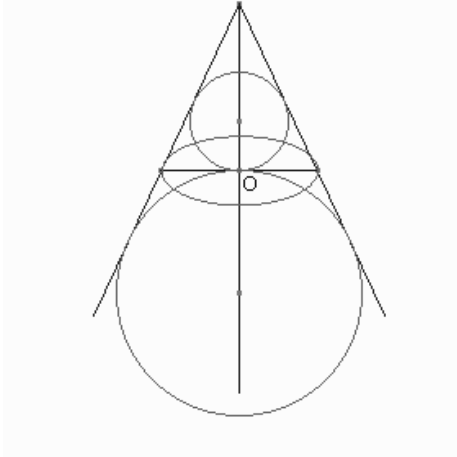
distancias a los focos la misma que la suma de distancias obtenida desde  $P$ . Con razonamientos igual de sencillos se ve que  $P_2$  y  $P_3$  también son puntos de la elipse.

Los segmentos determinados por los ejes de simetría y la elipse se llaman ejes de la misma. El eje que contiene a los focos es el **eje mayor**, que mide  $2a$ , y el otro eje es el **eje menor**, que mide  $2b$ .

## LA CIRCUNFERENCIA.



En el caso particular en que el plano que corta al cono es perpendicular al eje, las dos esferas inscritas al cono y tangentes al plano, determinan un solo foco, es decir,  $F = F' = O$ .



Esto significa que desde cualquier punto P de la elipse se cumplirá que  $PF = PF' \rightarrow PF + PF' = 2PO$ , por lo que la distancia desde cualquier punto P de la elipse al foco O es una constante, que llamaremos r.

Este tipo de elipse recibe el nombre de **circunferencia**, el foco se llama **centro**, y la distancia desde cualquier punto de la misma al centro se llama **radio**. Así, la circunferencia es el lugar geométrico de los puntos del plano que

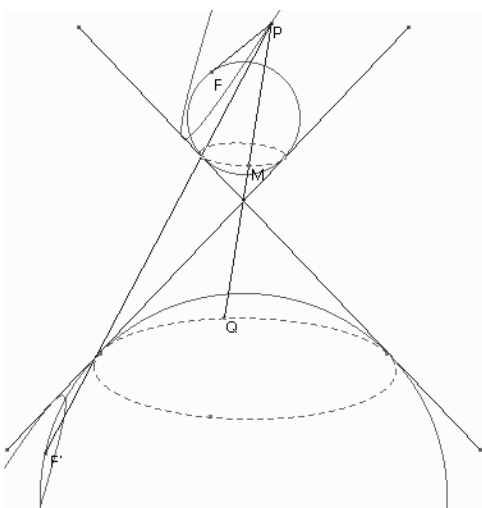
equidistan de un punto dado, llamado centro.

La circunferencia será simétrica respecto del centro y respecto de cualquier recta que pase por éste. El segmento determinado por cualquier recta que pase por el centro y la curva, se llamará **diámetro**. La medida del diámetro es, evidentemente, el doble del radio.

### LA HIPÉRBOLA.

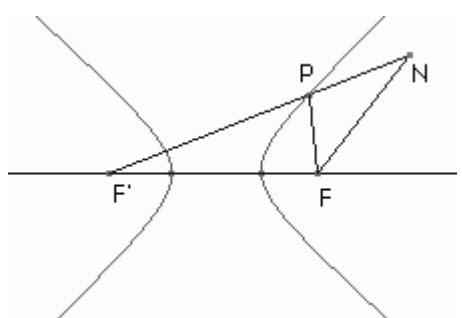
Consideremos, como hemos hecho hasta ahora, una hipérbola y dos esferas tangentes interiores al cono y al plano de corte que produce la hipérbola, como indica la figura.

Dado un punto P cualquiera de la curva, consideramos la generatriz del cono que pasa por él, que cortará a las circunferencias intersección de las esferas y el cono, en M y Q, como se indica.



Como puede observarse, la distancia MQ es constante para cualquier generatriz, y en consecuencia, para cualquier punto P de la hipérbola.

Ahora bien,  $PM = PF$  por ser ambos segmentos tangentes a la misma esfera trazados desde el mismo punto P. Igualmente,  $PF' = PQ$ , por lo que  $PF' - PF = PQ - PM = MQ$ , que es constante.



Supongamos ahora que tomamos un punto N del plano de la hipérbola que no pertenece a la misma. Entonces,  $NF' - NF = PF' + PN - NF$ . En el triángulo PNF se cumple, como en todos, que  $PN - NF < PF$ , luego  $NF' - NF = PF' + PN - NF > PF' - PF$ , lo que significa que solo los puntos de la hipérbola



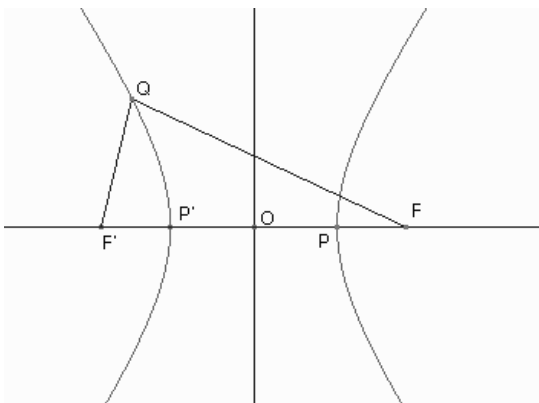


cumplen la condición de que la diferencia de distancias es una constante dada.

En vista de ello, podemos enunciar:

**La hipérbola es el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la diferencia de distancias desde ellos a dos puntos fijos dados es constante.**

Los puntos  $F$  y  $F'$  son los focos de la hipérbola, y podemos demostrar, de modo semejante a como lo hemos hecho con la elipse, que es una curva simétrica respecto de la recta que une los focos, respecto de la mediatriz del segmento  $FF'$ , y respecto del punto de corte de los dos ejes de simetría. Este punto se llamará centro de la hipérbola, y los ejes de simetría, ejes de la hipérbola.

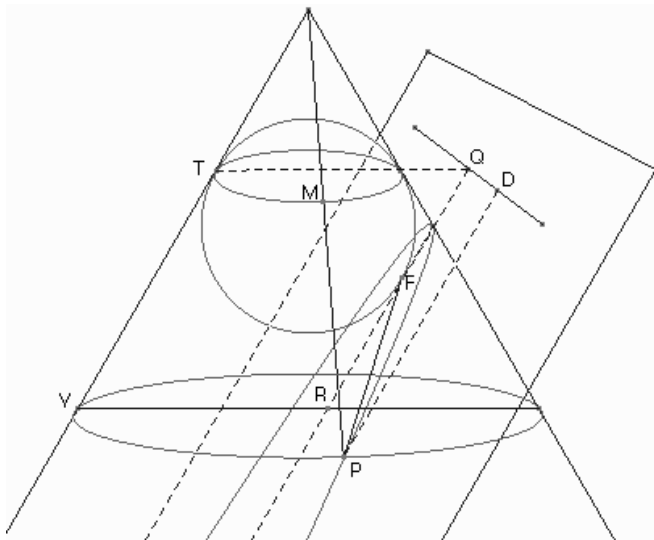


Si llamamos  $P$  y  $P'$  a los puntos de intersección de la hipérbola con el eje que une los focos, y  $O$  al punto medio del segmento  $FF'$ , podemos razonar, como en el caso de la elipse, que si la distancia  $PP'$  es  $2a$ , entonces la diferencia constante que caracteriza a la hipérbola es  $2a$

Si llamamos  $P$  y  $P'$  a los puntos de intersección de la hipérbola con el eje que une los focos, y  $O$  al punto medio del segmento  $FF'$ , podemos razonar, como en el caso de la elipse, que si la distancia  $PP'$  es  $2a$ , entonces la diferencia constante que caracteriza a la hipérbola es  $2a$

$$2.a = PP' = PF' - P'F = PF' - PF = QF - QF' \rightarrow a = OF = OF'$$

### LA PARÁBOLA.



Sea una parábola obtenida por el corte de un plano paralelo a una generatriz, como indica la figura. Dado un punto cualquiera  $P$  de la curva, y dada una esfera inscrita en el cono y tangente al plano de la parábola en el punto  $F$ , consideramos la generatriz que pasa por  $P$ . Ésta, cortará a la circunferencia intersección de la esfera y el cono en un punto  $M$ , por lo que  $PM = PF$ , como en los casos anteriores. Consideramos

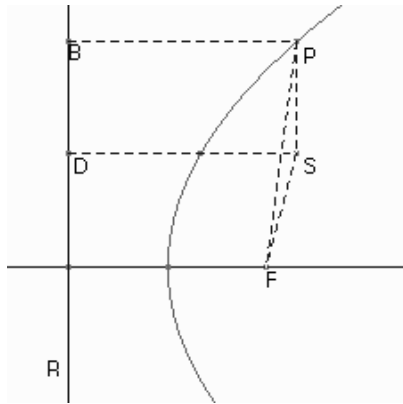
sobre el cono, la circunferencia paralela a la anterior, que pasa por  $P$ , con lo que el segmento  $PM$  mide lo mismo que el determinado por cualquier otra generatriz y sus cortes con las dos circunferencias. En concreto,  $PM = VT$ .

Como el plano de la parábola es paralelo a  $VT$ , tendremos que  $VT = RQ$ , por ser segmentos paralelos comprendidos entre segmentos paralelos ( $VTRQ$  es un paralelogramo). Por el mismo motivo, si  $QD$  es perpendicular a  $RQ$  y  $PD$  es paralela a  $RQ$ , tendremos que  $VT = RQ = PD$ , con lo que  $PF = PD$ . Si tenemos en cuenta que la recta  $QD$  no depende de  $P$  y  $F$  tampoco, hemos obtenido que la distancia de  $P$  al punto



fijo  $F$  es igual a la distancia de  $P$  a la recta fija  $QD$ . El punto  $F$  se llamará foco de la parábola, y la recta  $QD$  será la directriz.

Veamos ahora que si  $S$  es un punto que no pertenece a la parábola, no cumple esta condición:



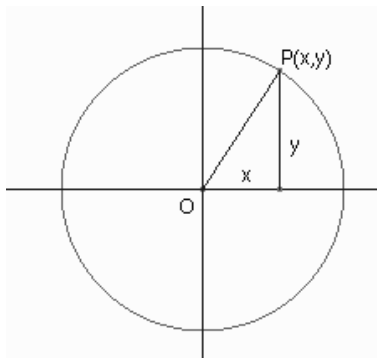
Consideramos la intersección  $P$  de la paralela a la directriz por  $S$  y la parábola, con lo que  $PB = SD$ .

Por otra parte,  $PF \neq SF$ , por lo que  $SD \neq SF$ , y el punto  $S$  no verifica la condición indicada. Esto quiere decir que podemos definir la parábola como el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto dado, llamado foco, y de una recta dada, llamada directriz.

Es fácil demostrar que la parábola es una curva simétrica respecto de la recta que pasa por el foco y es perpendicular a la directriz, de modo semejante a como lo hemos hecho con la elipse. El eje de simetría se llamará simplemente eje de la parábola, y el punto de intersección de la parábola con el eje se llamará vértice, cumpliéndose que es el punto de la parábola más próximo a la directriz.

### 3. ESTUDIO ANALÍTICO.

Antes de empezar, todas las definiciones y teoremas referentes a la geometría de la circunferencia vistos en el tema 40, los daremos por sabidos.



#### 3.1 LA CIRCUNFERENCIA.

##### ECUACIONES.

Dada una circunferencia, elegimos un sistema de referencia cartesiano con origen en el centro de la circunferencia.

Dado un punto  $P$  cualquiera de la misma, su distancia al centro es constante e igual al radio  $R$ . Si aplicamos el teorema de Pitágoras, como se observa en la figura, obtendremos la ecuación de la circunferencia,  $x^2 + y^2 = R^2$  (1)

Esta ecuación la cumplirán todos los puntos de la circunferencia y solo ellos, como hemos visto en el apartado anterior. Los valores posibles para  $x$  e  $y$  se muevan ambos en el intervalo  $[-R, R]$ .

Si el centro de la circunferencia está en cualquier otro punto  $(a, b)$ , podemos obtenerla como traslación de otra circunferencia con centro en el origen y el mismo radio, mediante el vector de traslación  $(a, b)$ . Dado un punto  $P(x, y)$  de ésta, su transformado



será  $P'(x', y')$ , verificándose que  $x = x' - a$ ,  $y = y' - b$ , por lo que, sustituyendo en la ecuación (1) tenemos:

$$(x' - a)^2 + (y' - b)^2 = R^2 \quad (2)$$

Si desarrollamos, obtenemos la ecuación general de la circunferencia

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0 \quad (3)$$

Observamos, por tanto, que dada una ecuación de segundo grado en  $x$  e  $y$  de la forma  $mx^2 + my^2 + nx + py + q = 0$  (4) con  $m \neq 0$ , se puede transformar en una equivalente a

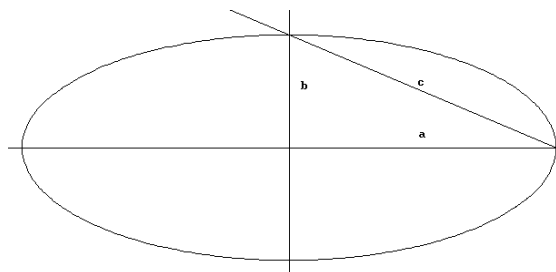
$$(3), \text{ sin más que dividir por } m: x^2 + y^2 - 2\frac{n}{-2m}x - 2\frac{p}{2m}y + \frac{q}{m} = 0$$

El radio de esta circunferencia sería  $R^2 = \frac{n^2 + p^2}{4m^2} - \frac{q}{m}$  (5), cantidad que habría de ser necesariamente positiva para que la ecuación tenga sentido.

Luego toda ecuación de la forma (4) corresponde a una circunferencia, siempre que (5) sea positivo.

### 3.2 LA ELIPSE.

Para hallar la ecuación de la elipse, situamos el origen de coordenadas en el punto medio del segmento que une los focos, estando este segmento sobre el eje  $X$ . Los focos serán los puntos  $F(c, 0)$  y  $F'(-c, 0)$ .



Dado un punto  $P(x, y)$  de la elipse, llamamos  $2a$  a la suma constante de distancias desde este punto a los focos. Entonces,

$$2a = \sqrt{(x - c)^2 + y^2} + \sqrt{(x + c)^2 + y^2}, \text{ o lo que es lo mismo}$$

$$2a - \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}. \text{ Elevamos al cuadrado:}$$

$$4a^2 + (x - c)^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = (x + c)^2 + y^2. \text{ Simplificando:}$$

$4a^2 - 2cx - 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2cx \Rightarrow a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = a^2 - cx$ . Volvemos a elevar al cuadrado, y obtenemos  $a^2 \cdot (x^2 + c^2 - 2cx + y^2) = a^4 + c^2x^2 - 2a^2cx$ . Reagrupamos:

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2). \text{ Dividiendo toda la igualdad entre } a^2 \cdot (a^2 - c^2),$$



$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$ . Si llamamos  $b^2 = a^2 - c^2$ , como ya hemos hecho antes, la ecuación queda:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (6), \text{ no siendo necesario explicar de nuevo que son los semiejes.}$$

Los valores posibles para las variables son,  $x \in [-a, a]$ ,  $y \in [-b, b]$

Vista la ecuación de la elipse, es evidente que es una curva simétrica respecto de ambos ejes y del origen de coordenadas. En efecto, si un punto P de coordenadas (x, y) verifica esta ecuación, los puntos simétricos (-x, y), (x, -y), (-x, -y) también la verificarán.

Si consideramos una elipse no centrada en el origen, será simétrica respecto de sus ejes mayor y menor y respecto de su centro, que es el punto medio del segmento que une sus focos. Si sus ejes son paralelos a los ejes de coordenadas, podemos obtener su ecuación sin más que aplicar una traslación en (6), donde el vector de traslación es el que va del origen al centro de la elipse, teniendo las coordenadas de éste. Si dicho centro está en el punto (m, n), la ecuación será:

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1 \quad (7)$$

Si los ejes de la elipse no son paralelos a los de coordenadas, habrá que aplicar una rotación después de la traslación, para obtener la ecuación de la curva. Si el ángulo de rotación es  $\alpha$ , el cambio que ha de realizarse es

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha + y' \sin \alpha \\ y = -x' \sin \alpha + y' \cos \alpha \end{cases}, \text{ con lo que la}$$

ecuación se complica considerablemente:

$$\begin{aligned} & (b^2 \cos^2 \alpha + a^2 \sin^2 \alpha)x^2 + (b^2 \sin^2 \alpha + a^2 \cos^2 \alpha)y^2 + 2(b^2 - a^2) \sin \alpha \cos \alpha xy + \\ & + 2(-b^2 m \cos \alpha + a^2 n \sin \alpha)x - 2(b^2 m \sin \alpha + a^2 n \cos \alpha)y + b^2 m^2 + a^2 n^2 - a^2 b^2 = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

### EXCENTRICIDAD.

La constante  $\frac{c}{a} = e$  se denomina excentricidad de la elipse, y sirve para medir el grado de "achatamiento" de la misma.

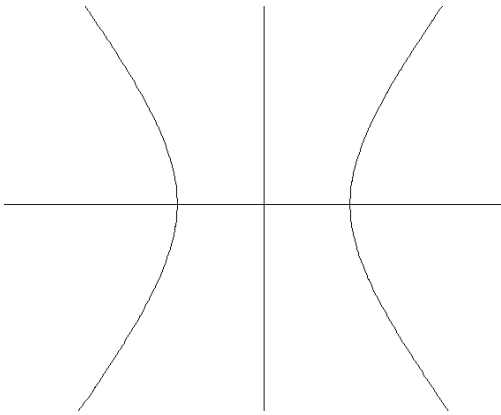
En el caso de una circunferencia, la constante c, mitad de la distancia focal, es 0, y a es el radio, por lo que  $e = 0$ . En los demás casos, como  $0 \leq c < a$ , tendremos que  $0 < e < 1$ . Cuanto más achatada es la elipse, es decir, cuanto mayor es la diferencia  $a - b$ ,

más próximo a 1 está la excentricidad. Como  $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = 1 - \sqrt{\frac{b}{a}}$ , en el caso en que  $b/a$  tienda a 0, la excentricidad tenderá a 1.



### 3.3 LA HIPÉRBOLA.

Dada una hipérbola de focos  $F$  y  $F'$ , tomamos un sistema de referencia con origen en el punto medio del segmento  $FF'$ , centro de la hipérbola, y eje  $X$  el eje  $FF'$ .



Si llamamos  $2a$  a la diferencia constante de distancias entre un punto  $P$  de la hipérbola y sus focos, tenemos que  $PF - PF' = 2a$

Si las coordenadas de los focos son  $F(c, 0)$  y  $F'(-c, 0)$ , tenemos un planteamiento del problema idéntico al de la elipse, con un cambio de signo:

$$2a = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

Siguiendo un desarrollo paralelo, llegaremos a la ecuación de la hipérbola:

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  (9), siendo en este caso  $b^2 = c^2 - a^2$ , y los posibles valores de las variables,  $x \in ]-\infty, a] \cup [a, +\infty[$ ,  $y \in \mathbb{R}$

Si aplicamos una traslación de vector  $(m, n)$ , siempre siguiendo un desarrollo paralelo al que hemos llevado a cabo con la elipse, la ecuación de la hipérbola queda

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1 \quad (10)$$

y si después aplicamos una rotación de ángulo  $\alpha$ , tendremos

$$\begin{aligned} & (b^2 \cos^2 \alpha + a^2 \sin^2 \alpha)x^2 - (b^2 \sin^2 \alpha + a^2 \cos^2 \alpha)y^2 - 2(b^2 - a^2) \sin \alpha \cos \alpha xy + \\ & + 2(-b^2 m \cos \alpha + a^2 n \sin \alpha)x + 2(b^2 m \sin \alpha + a^2 n \cos \alpha)y + b^2 m^2 + a^2 n^2 - a^2 b^2 = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

#### EXCENTRICIDAD.

Como en el caso de la elipse, definimos la excentricidad de la hipérbola como la cantidad  $e = \frac{c}{a}$ , que en este caso será siempre mayor que 1, por ser  $c^2 = a^2 + b^2$ .

Si consideramos a constante y variamos el valor de  $b$ , tendremos que, al ser

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

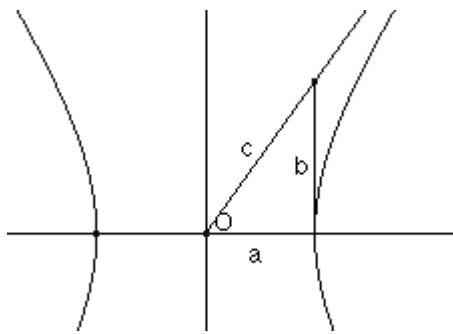
cuando  $b$  tienda a  $\infty$  ocurrirá lo mismo con  $e$ . En el primer caso, la hipérbola tiende a



convertirse en dos semirrectas horizontales con origen en los focos, y en el segundo, en dos rectas paralelas verticales que pasan por los puntos  $(\pm a, 0)$ .

### ASÍNTOTAS.

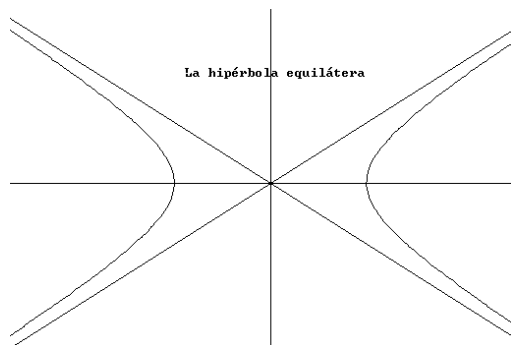
Si despejamos la variable  $y$  en la ecuación de la hipérbola, tenemos que  $\frac{x^2}{a^2} - 1 = \frac{y^2}{b^2} \Rightarrow y^2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot (x^2 - a^2) \Rightarrow y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{(x^2 - a^2)}$ , que podemos considerar como dos funciones distintas, simétricas respecto del eje X, según el signo que tomemos.



Tomando límites, es evidente que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \pm \frac{b}{a}$ , y

que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} - \frac{b}{a} x = 0$ , con lo que la hipérbola presenta dos asíntotas oblicuas en las rectas  $y = \pm \frac{b}{a} x$ .

Si trazamos una asíntota y la perpendicular al eje X por el punto de corte entre éste y la curva, tendremos un triángulo rectángulo determinado por la asíntota, un segmento del eje X que mide  $a$  y la perpendicular al eje X. Como la pendiente de la recta es  $\pm b/a$ , necesariamente las medidas de los lados del triángulo son las que se expresan en la figura, ya que  $c^2 = a^2 + b^2$ .



En el caso particular en que  $a = b$  estas asíntotas son las bisectrices de los cuadrantes,  $y = \pm x$ , y la hipérbola se llama **equilátera**.

### 3.4 LA PARÁBOLA.

Al ser los puntos de la parábola los que equidistan de una recta directriz y de un punto llamado foco, tomamos un sistema de referencia en que el eje X es la perpendicular a la directriz por el foco F, y el eje Y es la paralela a la directriz por el punto medio del segmento determinado por el foco y la intersección del eje X con la directriz.

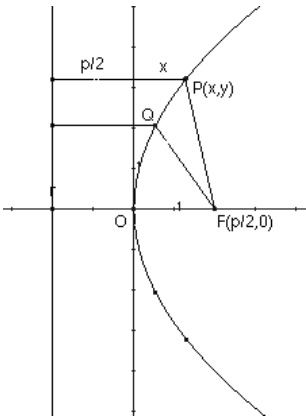
Sea  $P(x, y)$  un punto cualquiera de la parábola, con lo que su distancia a la directriz será  $x + p/2$ , siendo  $p$  la distancia entre el foco F y la directriz  $r$ . Entonces deberá cumplirse que

$$x + \frac{p}{2} = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} . \text{ Si elevamos a cuadrado y simplificamos, queda simplemente}$$

que  $px = -px + y^2$ , y despejando, obtenemos la ecuación de la parábola



$y^2 = 2px$  (12), que es, evidentemente simétrica respecto del eje X y pasa por el origen de coordenadas, que es su vértice y su único corte con los ejes.



Los valores posibles para las variables son  $x \in [0, +\infty[$ ,  $y \in \mathbb{R}$

La parábola no presenta asíntotas de ningún tipo, lo que es elemental de verificar a partir de la expresión  $y = \pm\sqrt{2px}$  y calculando los límites oportunos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} y = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} y = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = 0$$

Si aplicamos a la gráfica de la parábola una traslación de vector  $(m, n)$ , obtendremos una nueva parábola que tendrá el vértice en el punto  $V(m, n)$ , cuya directriz será la recta  $x = -\frac{p}{2} + m$ , y cuyo foco será  $F\left(\frac{p}{2} + m, n\right)$ . Su nueva ecuación es  $(y - n)^2 = 2p(x - m)$  (13)

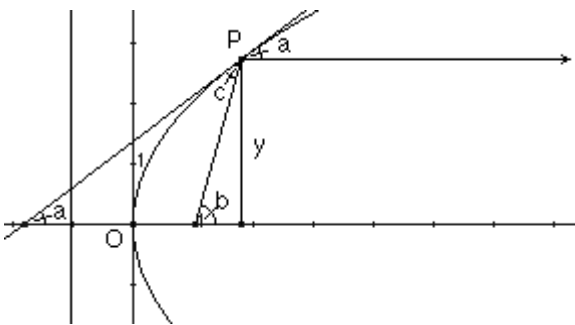
Si después de la traslación aplicamos una rotación de ángulo  $\alpha$  para obtener la ecuación general de la parábola, tendremos que aplicar el cambio  $\begin{cases} x = x' \cos \alpha + y' \sin \alpha \\ y = -x' \sin \alpha + y' \cos \alpha \end{cases}$ , con lo que la ecuación quedará así:

$$(-x' \sin \alpha + y' \cos \alpha - n)^2 = 2p(x' \cos \alpha + y' \sin \alpha - m). \text{ Operando:}$$

$$\sin^2 \alpha \cdot x'^2 + \cos^2 \alpha \cdot y'^2 - 2 \sin \alpha \cos \alpha \cdot x'y' + 2(n \sin \alpha + p \cos \alpha)x' + 2(-n \cos \alpha + p \sin \alpha)y' + n^2 - 2pm = 0$$

(14)

**PROPIEDAD FOCAL.**



Dado un punto  $P(x, y)$  de la elipse, hemos visto que la pendiente de su recta tangente es  $\text{tg } a = \frac{p}{y}$ .

Por otra parte, consideremos el segmento que une el foco con  $P$ , que forma un ángulo  $b$  con el eje X. Es

evidente que se cumple que  $\text{tg } b = \frac{y}{x - \frac{p}{2}}$ .



$$\text{Ahora bien, } \operatorname{tg}(2.a) = \frac{2\operatorname{tga}}{1-\operatorname{tg}^2 a} = \frac{\frac{2p}{y}}{1-\frac{p^2}{y^2}} = \frac{2py}{y^2-p^2} = \frac{2py}{2px-p^2} = \frac{y}{x-\frac{p}{2}} = \operatorname{tg} b \rightarrow 2.a = b$$

Pero, examinado la figura,  $b$  es el suplementario del suplementario de  $a + c$ , luego  $b = a + c \rightarrow c = b - a = 2.a - a = a$

Si un rayo de luz parte del foco e incide en  $P$ , por las propiedades de la reflexión el ángulo de incidencia es igual al ángulo de salida, luego ambos ángulos serán iguales a “ $a$ ”, según acabamos de demostrar. Pero esto tiene una consecuencia muy importante para la tecnología, y es que la recta que representa el rayo reflejado será paralela al eje  $X$ , o sea, al eje de la parábola. Por lo tanto, si colocamos en el foco una fuente de luz, todos los rayos reflejados por la superficie de la parábola siguen la misma dirección: la de su eje. Por otra parte, la propiedad puede interpretarse al revés: toda partícula que incida sobre la parábola viniendo de una dirección paralela a su eje, rebotará hacia el foco de la misma.

### 3.5 LUGARES DESCRITOS POR UN POLINOMIO DE SEGUNDO GRADO EN DOS INDETERMINADAS.

Ya hemos visto que las ecuaciones generales de las cónicas se expresan mediante ecuaciones polinómicas de segundo grado en dos indeterminadas, por lo que cabe hacerse la pregunta contraria, es decir, ¿Toda ecuación polinómica de segundo grado en dos indeterminadas será la ecuación de una cónica?

El primer estudio detallado de la cuestión apareció en la obra de Euler, publicada en 1748, “Introducción al Análisis”. En el segundo tomo se resuelve la cuestión, transformando una función polinómica cualquiera de segundo grado en dos indeterminadas, en su forma canónica.

#### FORMA CANÓNICA DE LA ECUACIÓN GENERAL DE SEGUNDO GRADO.

Sea la ecuación con coeficientes reales,  $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$ , de manera que  $A$  y  $B$  no son simultáneamente nulos.

#### ECUACIÓN MATRICIAL.

Es evidente que la ecuación de la cónica se puede expresar matricialmente como

$$(1 \quad x \quad y) \cdot \begin{pmatrix} F & D/2 & E/2 \\ D/2 & A & C/2 \\ E/2 & C/2 & B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0, \text{ donde se observa que la matriz es simétrica,}$$

por lo que se corresponde con la matriz asociada a una forma cuadrática definida sobre un subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^3$ .



**FORMAS DE LA ECUACIÓN MATRICIAL.**

La forma ortodoxa de expresar la ecuación anterior de la cónica es:

$$(1 \ x \ y) \cdot \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow X \cdot A \cdot X^t = 0. \text{ Esta expresión no es más que una}$$

regla mnemotécnica, puesto que su forma polinómica es  $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0$ , donde los subíndices de los coeficientes hacen referencia a las variables. "1" es x, "2" es y, "0" es término independiente, de manera que "11" es el coeficiente de x al cuadrado, "10" el de x, y así sucesivamente. Se supone que la matriz es simétrica, necesariamente, o sea,  $a_{01} = a_{10}$ ,  $a_{02} = a_{20}$ , y por último,  $a_{12} = a_{21}$

La matriz A se subdivide en tres matrices,

$$A_q = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad A_L = (a_{01} \ a_{02}), \quad A_i = (a_{00}), \text{ siendo } A_q \text{ la matriz de coeficientes de}$$

segundo grado o cuadrática,  $A_L$  la matriz de coeficientes de primer grado o lineal, y  $A_i$  la matriz del término independiente. Así las cosas, la ecuación de la cónica se puede expresar también como:

$$(x \ y) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2(x \ y) \cdot \begin{pmatrix} a_{01} \\ a_{02} \end{pmatrix} + a_{00} = 0 \Leftrightarrow X \cdot A_q \cdot X^t + 2X \cdot A_L + A_i = 0$$

Desde este último punto de vista, la matriz  $A_q$  es la matriz de una forma cuadrática definida sobre  $\mathbb{R}^2$  al ser simétrica y real, por lo que usaremos la clasificación de las formas cuadráticas para definir el tipo de cónica que representa la ecuación..

**INVARIANTES MÉTRICOS.**

Los elementos que permanecen invariantes en la matriz de una forma cuadrática se llaman así porque no varían cuando se cambia la base del espacio vectorial V sobre el que se define la forma cuadrática, y por tanto la matriz de esa forma cuadrática.

En nuestro caso, el espacio vectorial es  $\mathbb{R}^2$ , o sea el plano euclídeo, y los invariantes, que ahora se llaman métricos, no cambian aunque varíe la base, o sea el sistema de referencia y con el, la matriz de la cónica. Los invariantes métricos de una cónica van a ser, en consecuencia:

1. El determinante  $|A|$ .
2. El determinante  $|A_q| = A_{00}$ . (Adjunto de  $a_{00}$ ).
3. Los autovalores  $\lambda_1, \lambda_2$ .
4. La traza de  $A_q$ ,  $\lambda_1 + \lambda_2$ .

**CÁLCULO DE LA ECUACIÓN REDUCIDA O CANÓNICA.**

Partimos de la ecuación de la cónica

$$(x \ y) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2(x \ y) \cdot \begin{pmatrix} a_{01} \\ a_{02} \end{pmatrix} + a_{00} = 0 \Leftrightarrow \boxed{X \cdot A_q \cdot X^t + 2X \cdot A_l + A_i = 0}$$

La matriz  $A_q$  es diagonalizable por ser la matriz simétrica de una forma cuadrática, de manera que  $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \Leftrightarrow A_q = P \cdot D \cdot P^t$ , siendo  $\lambda_1, \lambda_2$  los valores propios de la forma cuadrática y  $P$  la matriz ortogonal de cambio de base (sistema de referencia), formada por vectores propios ortogonales. Sustituyendo:

La matriz ortogonal de paso  $P$  se corresponde con la ecuación de un giro centrado en el origen, de modo que las coordenadas en el nuevo sistema de referencia ortonormal son

$$(x' \ y') = (x \ y) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \Leftrightarrow X' = X \cdot P. \text{ Pero, } X' = X \cdot P \Leftrightarrow X = X' \cdot P^t, \text{ al ser } P \text{ y } P^t$$

inversas, dada su ortogonalidad. En consecuencia, podemos escribir la ecuación de la cónica como:

$$X \cdot P \cdot D \cdot P^t \cdot X^t + 2X \cdot A_l^t + A_i = (X \cdot P) \cdot D \cdot (X \cdot P)^t + 2 \cdot X' \cdot P^t \cdot A_l^t + A_i = X' \cdot D \cdot X'^t + 2 \cdot X' \cdot (A_l \cdot P)^t + A_i = 0$$

Si llamamos  $B_l = A_l \cdot P$ , obtenemos

$$X' \cdot D \cdot X'^t + 2 \cdot X' \cdot B_l^t + A_i = 0 \Leftrightarrow (x' \ y') \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 2(x' \ y') \cdot \begin{pmatrix} b_{01} \\ b_{02} \end{pmatrix} + a_{00} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\lambda_1 \cdot x'^2 + \lambda_2 \cdot y'^2 + 2b_{01}x' + 2b_{02}y' + a_{00} = 0}$$

Como la ecuación original era de segundo grado, esta lo seguirá siendo, por lo que, como ya hemos mencionado anteriormente,  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  no se anulan simultáneamente. En consecuencia, para proseguir hemos de distinguir los casos siguientes:

**CASO 1.**  $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$

Podemos ajustar cuadrados, de manera que la ecuación será

$$\lambda_1 \cdot x'^2 + \lambda_2 \cdot y'^2 + 2b_{01}x' + 2b_{02}y' + a_{00} = \lambda_1 \left( x'^2 + 2 \frac{b_{01}}{\lambda_1} x' \right) + \lambda_2 \left( y'^2 + 2 \frac{b_{02}}{\lambda_2} y' \right) + a_{00} = 0 \Leftrightarrow$$



$$\Leftrightarrow \lambda_1 \left( x'^2 + 2 \frac{b_{01}}{\lambda_1} x' + \left( \frac{b_{01}}{\lambda_1} \right)^2 \right) + \lambda_2 \left( y'^2 + 2 \frac{b_{02}}{\lambda_2} y' + \left( \frac{b_{02}}{\lambda_2} \right)^2 \right) + a_{00} = \frac{b_{01}^2}{\lambda_1} + \frac{b_{02}^2}{\lambda_2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 \left( x' + \frac{b_{01}}{\lambda_1} \right)^2 + \lambda_2 \left( y' + \frac{b_{02}}{\lambda_2} \right)^2 = \frac{b_{01}^2}{\lambda_1} + \frac{b_{02}^2}{\lambda_2} - a_{00}$$

Podemos aplicar los cambios  $x'' = x' + \frac{b_{01}}{\lambda_1}$ ,  $y'' = y' + \frac{b_{02}}{\lambda_2}$ , que son las ecuaciones de una traslación de vector  $\left( \frac{b_{01}}{\lambda_1}, \frac{b_{02}}{\lambda_2} \right)$ , y llamar  $b_{00} = \frac{b_{01}^2}{\lambda_1} + \frac{b_{02}^2}{\lambda_2} - a_{00}$ , para obtener la ecuación reducida:

$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 = b_{00}$ . En el caso en que  $b_{00} \neq 0$ , podemos pasar a la forma :

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 = b_{00} \Leftrightarrow \frac{\lambda_1}{b_{00}} x''^2 + \frac{\lambda_2}{b_{00}} y''^2 = 1 \Leftrightarrow \boxed{\frac{x''^2}{\frac{b_{00}}{\lambda_1}} + \frac{y''^2}{\frac{b_{00}}{\lambda_2}} = 1}$$

**CASO 2.**  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 \neq 0$

La ecuación queda  $\lambda_2 \cdot y'^2 + 2b_{01}x' + 2b_{02}y' + a_{00} = 0$ . Si ajustamos un cuadrado:

$$\lambda_2 \left( y' + \frac{b_{02}}{\lambda_2} \right)^2 + 2b_{01}x' + a_{00} = \frac{b_{02}^2}{\lambda_2} \Leftrightarrow \lambda_2 \left( y' + \frac{b_{02}}{\lambda_2} \right)^2 = -2b_{01}x' + \frac{b_{02}^2}{\lambda_2} - a_{00}.$$

Haciendo  $b_{00} = \frac{b_{02}^2}{\lambda_2} - a_{00}$ , obtenemos  $\lambda_2 \left( y' + \frac{b_{02}}{\lambda_2} \right)^2 = -2b_{01}x' + b_{00}$

**CASO 2.1**  $b_{01} \neq 0$

Operamos, y tenemos,  $\lambda_2 \left( y' + \frac{b_{02}}{\lambda_2} \right)^2 = -2b_{01} \left( x' - \frac{b_{00}}{2b_{01}} \right)$

Aplicamos la traslación de vector  $\left( -\frac{b_{00}}{2b_{01}}, \frac{b_{02}}{\lambda_2} \right)$ , para obtener la ecuación reducida

$$\boxed{\lambda_2 \cdot y''^2 = -2b_{01}x''}$$

**CASO 2.2**  $b_{01} = 0$



Entonces,  $\lambda_2 \left( y' + \frac{b_{02}}{\lambda_2} \right)^2 = \frac{b_{02}^2}{\lambda_2} - a_{00}$ . Aplicando los cambios,  $y'' = y' + \frac{b_{02}}{\lambda_2}$ ,  
 $b_{00} = \frac{b_{02}^2}{\lambda_2} - a_{00}$ , tenemos la forma reducida  $\lambda_2 \cdot y''^2 = b_{00}$

**CASO 3.**  $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0$

Es idéntico al caso 2, cambiando los papeles de x e y.

**1 CLASIFICACIÓN POR TIPOS Y ECUACIÓN REDUCIDA.**

**TIPO ELÍPTICO.**

Supongamos que tenemos una cónica de tipo elíptico, o lo que es lo mismo, su matriz de coeficientes cuadráticos  $A_q$  tiene dos valores propios que verifican que  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ , o sea que tienen el mismo signo y son ambos no nulos.

Como hemos visto en el caso 1 anterior, su ecuación reducida es  $\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 = b_{00}$ . Podemos considerar las posibilidades:

**1.  $b_{00} \neq 0$  y  $\text{signo}(\lambda_1) = \text{signo}(\lambda_2) = \text{signo}(b_{00})$**

Como ya hemos visto, la ecuación se convierte en ... Como los denominadores serán positivos, podemos llamar  $a^2 = b_{00} / \lambda_1$ ,  $b^2 = b_{00} / \lambda_2$ , y obtenemos la ecuación canónica

de una elipse  $\boxed{\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1}$

**2.  $b_{00} \neq 0$  y  $\text{signo}(\lambda_1) = \text{signo}(\lambda_2) \neq \text{signo}(b_{00})$**

Procediendo como antes, los denominadores de  $\frac{x''^2}{b_{00}/\lambda_1} + \frac{y''^2}{b_{00}/\lambda_2} = 1$ , serán ahora

negativos, por lo que se obtiene la ecuación  $\boxed{\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = -1}$ , llamada elipse

imaginaria, pues no la verifica ningún punto, ya que una suma de cuadrados no puede ser negativa.

**3.  $b_{00} = 0$**

En este caso, la ecuación reducida es  $\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 = 0 \leftrightarrow y''^2 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} x''^2 \leftrightarrow \boxed{x'' = 0, y'' = 0}$ , al ser la fracción negativa por



tener los valores propios el mismo signo. Entonces, tenemos una elipse degenerada que se reduce a un único punto del plano.

**TIPO HIPERBÓLICO.**

Tenemos ahora una cónica cuya matriz de coeficientes cuadráticos tiene dos valores propios no nulos, de distinto signo,  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$ . En este caso, la ecuación reducida , presenta las posibilidades que vamos a ver a continuación.

**1.  $b_{00} \neq 0$**

La ecuación pasa a ser  $\frac{x''^2}{b_{00}/\lambda_1} + \frac{y''^2}{b_{00}/\lambda_2} = 1$ , con dos fracciones en los denominadores de signo opuesto, al ser los valores propios de signo distinto. Podremos escribir la ecuación como  $\boxed{\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 1}$  si  $b_{00}/\lambda_2$  es negativo, o como  $\boxed{-\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1}$ , si  $b_{00}/\lambda_1$  es negativo. En cualquier caso, esta es la ecuación canónica de una hipérbola.

**2.  $b_{00} = 0$**

Ocorre entonces que la ecuación es  $\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 = 0 \leftrightarrow y''^2 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} x''^2 \leftrightarrow \boxed{y'' = \pm \sqrt{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \cdot x''}$ , gracias a que los signos de los autovalores son opuestos, lo que nos da una hipérbola degenerada, consistente en dos rectas que se cortan en el origen.

**TIPO PARABÓLICO.**

En este caso, tenemos una cónica con una matriz  $A_q$  con un valor propio nulo, lo que coincide con el caso 2 del estudio anterior sobre la ecuación reducida. Supongamos, como entonces que  $\lambda_1 = 0$  y que  $\lambda_2 \neq 0$ , puesto que no se pueden anular a la vez. El caso contrario es el mismo, sin mas que sustituir x por y, y viceversa.

La ecuación reducida era, en principio,  $\lambda_2 \left( y' + \frac{b_{02}}{\lambda_2} \right)^2 = -2b_{01}x' + b_{00}$ , y teníamos dos posibilidades:

**1.  $b_{01} \neq 0$**

Entonces, operando y haciendo los cambios oportunos, tenemos la ecuación  $\lambda_2 \cdot y''^2 = -2b_{01}x''$ , que podemos escribir como  $y''^2 = -2 \frac{b_{01}}{\lambda_2} x'' \leftrightarrow \boxed{y''^2 = 2px''}$ .



Esta es la ecuación canónica de una parábola, con  $p = -\frac{b_{01}}{\lambda_2}$

**2.  $b_{01} = 0$**

La ecuación reducida era en este caso,  $\lambda_2 \cdot y''^2 = b_{00}$ , posibilidad que admite dos variaciones:

- Si los signos de  $\lambda_2$  y  $b_{00}$  son iguales,  $y''^2 = \frac{b_{00}}{\lambda_2} > 0 \Leftrightarrow y'' = \sqrt{\frac{b_{00}}{\lambda_2}} \Leftrightarrow \boxed{y'' = \pm k}$ , parábola degenerada consistente en dos rectas paralelas horizontales.
- Si los signos de  $\lambda_2$  y  $b_{00}$  son distintos,  $\boxed{y''^2 = \frac{b_{00}}{\lambda_2} < 0}$ , lo que es absurdo.

**EJEMPLO.**

Hallar la ecuación reducida de la cónica  $x^2 + y^2 + 2xy + 2x - 2 = 0$ .

La ecuación matricial es  $(1 \ x \ y) \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0$ , es decir :

$(x \ y) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2(x \ y) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 = 0$ , por lo que  $A_q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Hallamos sus valores propios,

$$|A_q - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0, \lambda = 2. \quad \text{Se}$$

trata, entonces, de una **cónica de tipo parabólico**. Pasamos a los vectores propios:

$$(A_q - \lambda I) \cdot X^t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (1-\lambda)x + y = 0 \\ x + (1-\lambda)y = 0 \end{cases}$$

Si  $\lambda = 0$ ,  $\begin{cases} (1-0)x + y = 0 \\ x + (1-0)y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x + y = 0 \Leftrightarrow x = -y \Leftrightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = t \end{cases}$  vectores del subespacio  $t \cdot (-1, 1)$

Si  $\lambda = 2$ ,  $\begin{cases} (1-2)x + y = 0 \\ x + (1-2)y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}$  vectores del subespacio  $t \cdot (1, 1)$



Los vectores unitarios ortonormales correspondientes serán  $\begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$  para  $\lambda = 0$ , y  $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$  para  $\lambda = 2$ . En consecuencia, la matriz de paso es  $P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . La ecuación queda:

$$(x \ y) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2(x \ y) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 = 0$$

Haciendo  $(x' \ y') = (x \ y) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ , se transforma en:

$$(x' \ y') \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \frac{2}{\sqrt{2}} (x' \ y') \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 = 0 \leftrightarrow (x' \ y') \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \sqrt{2} (x' \ y') \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 = 0$$

Esto

es

$$2y'^2 - \sqrt{2}x' + \sqrt{2}y' - 2 = 0 \leftrightarrow \sqrt{2}y'^2 - x' + y' - \sqrt{2} = 0 \rightarrow \sqrt{2} \left( y'^2 + 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} y' + \frac{1}{8} \right) - x' - \sqrt{2} = \frac{1}{8} \leftrightarrow$$

$$\sqrt{2} \cdot \left( y' + \frac{1}{2\sqrt{2}} \right)^2 = x' + \sqrt{2} + \frac{1}{8}, \quad \text{que con el cambio (Traslación)}$$

$$y'' = y' + \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad x'' = x' + \sqrt{2} + \frac{1}{8} \text{ nos da la parábola}$$

$$\sqrt{2} \cdot y''^2 = x'' \leftrightarrow y''^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} x'' \leftrightarrow \boxed{y''^2 = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} x''}, \text{ con el parámetro } p = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

## CLASIFICACIÓN POR INVARIANTES.

Una manera alternativa de clasificar una cónica es a partir de sus invariantes métricos, de la siguiente manera:

**1. Si es de tipo elíptico tenemos que  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0 \leftrightarrow |A_q| > 0 \leftrightarrow A_{00} > 0$**

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{00} & A_L \\ A_L & A_q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{00} & B_L \\ B_L & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{00} & b_{01} & b_{02} \\ b_{01} & \lambda_1 & 0 \\ b_{02} & 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} = a_{00} \lambda_1 \lambda_2 - (b_{01}^2 \lambda_2 + b_{02}^2 \lambda_1), \text{ gracias a que } |A|$$

es un invariante métrico. Entonces, tenemos que:



$$b_{00} = \frac{b_{01}^2}{\lambda_1} + \frac{b_{02}^2}{\lambda_2} - a_{00} = \frac{b_{01}^2 \lambda_2 + b_{02}^2 \lambda_1}{\lambda_1 \lambda_2} - a_{00} = \frac{a_{00} \lambda_1 \lambda_2 - |A|}{\lambda_1 \lambda_2} - a_{00} = -\frac{|A|}{A_{00}}, \quad \text{ya que}$$

$$\lambda_1 \lambda_2 = A_{00}.$$

Gracias a que  $b_{00} = -\frac{|A|}{A_{00}}$ , revisando la clasificación anterior, concluimos, a partir de la ecuación reducida  $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 = b_{00}$ :

- Si  $|A| = 0$ , es un punto
- Si  $|A| \cdot \lambda_1 < 0$ , es una elipse real.
- Si  $|A| \cdot \lambda_1 > 0$ , es una elipse imaginaria.

**2. Si es de tipo hiperbólico, tenemos que  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0 \leftrightarrow |A_q| < 0 \leftrightarrow A_{00} < 0$**

Razonando exactamente igual que antes, queda claro que:

- Si  $|A| = 0$ , es un par de rectas secantes.
- Si  $|A| \neq 0$ , es una hipérbola.

**3. Si es de tipo parabólico, tenemos que  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0 \leftrightarrow |A_q| = 0 \leftrightarrow A_{00} = 0$**

Suponiendo  $\lambda_1 = 0$ , la ecuación reducida es  $\lambda_2 \left( y' + \frac{b_{02}}{\lambda_2} \right)^2 = -2b_{01}x' + \frac{b_{02}^2}{\lambda_2} - a_{00}$

Tengamos en cuenta que  $|A| = \begin{vmatrix} a_{00} & A_L \\ A_L & A_q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{00} & B_L \\ B_L & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{00} & b_{01} & b_{02} \\ b_{01} & 0 & 0 \\ b_{02} & 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} = -(b_{01}^2 \lambda_2)$ , por lo

que  $b_{01} = 0 \leftrightarrow |A| = 0$ , ya que  $\lambda_2 \neq 0$ . Entonces:

- Si  $|A| = 0$ , puede ser un par de rectas paralelas, un punto, o un par de rectas imaginarias.
- Si  $|A| \neq 0$ , es una parábola.

Resumiendo todo lo anterior en un cuadro clasificatorio, hemos elaborado el anexo que se puede consultar al final del tema.

#### 4. LAS CÓNICAS EN LA NATURALEZA, EL ARTE Y LA TÉCNICA.

La presencia de estas curvas básicas en los campos a que hace referencia el título es abrumadora. De hecho, ya surgen de la búsqueda de una solución a un problema concreto de la Geometría, como hemos explicado en la introducción del tema. Sus





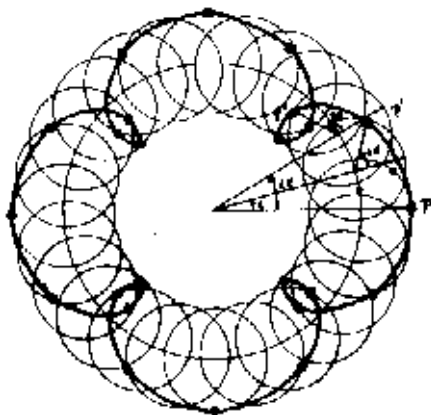
aplicaciones en otros terrenos como el arte, la física, la astronomía,... fueron inmediatos. Haremos un breve resumen de los casos mas relevantes.

## NATURALEZA.

En los conceptos más básicos de la astronomía, como son los sistemas de referencia basados en la esfera celeste, ya aparecen las cónicas. En concreto, la circunferencia, pues todos los sistemas de coordenadas astronómicas se basan en los conceptos elementales de geometría esférica: círculos máximos y polos. Así, nos encontramos con ecuador, eclíptica, meridiano, horizonte..., todos ellos círculos máximos de la esfera celeste. No consideramos necesario abundar aquí en ello, puesto que es más propio del tema 50 que de éste.

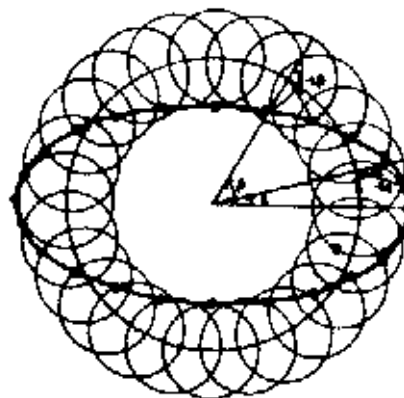
Según las primeras teorías astronómicas, el universo estaba formado por nueve esferas concéntricas, la última de las cuales estaba formada por las estrellas, que se movían en órbitas circulares paralelas, cuyo centro estaba en el eje del universo. Éste era la recta que unía el centro del mundo con la estrella polar, que estaba inmóvil.

Por desgracia para esta teoría, el movimiento de los planetas y el sol era contradictorio, pues estos astros no se resignaban a evolucionar en círculos perfectos, sino que variaban el punto de salida y el de puesta, y además, en periodos regulares presentaban movimientos de retroceso. La pregunta, según Platón era: ¿Qué clase de movimiento circular uniforme es el de los planetas, que los hace parecer moverse de modo diferente a las estrellas?.



La respuesta la dieron Aristóteles, Eudoxo, y por fin, Ptolomeo, basándose en los epiciclos y deferentes. La descripción dada por Ptolomeo, que atribuye a Apolonio, es esta: El planeta gira sobre una circunferencia llamada epiciclo, cuyo centro gira a su vez sobre otra circunferencia llamada deferente.

Si se observa este movimiento desde el centro de la deferente, donde se sitúa la Tierra y el centro del universo, el planeta experimentará aparentes retrogradaciones y aumentos de brillo cuando su distancia sea más próxima.

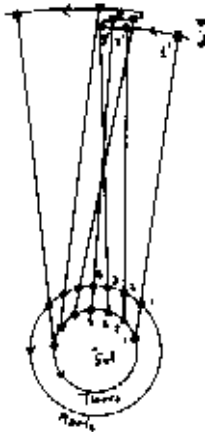


Variando las velocidades de rotación, e incluso el sentido del mismo, se pueden obtener todo tipo de explicaciones sobre los comportamientos planetarios. Por ejemplo, se puede obtener una trayectoria aparentemente elíptica si el sentido de giro por el epiciclo es el contrario que el de la deferente. Añadiendo nuevos epiciclos que giran a lo largo de otros epiciclos que van



por deferentes, y variando el tamaño de los radios, se puede explicar cualquier trayectoria, por complicada que sea.

El esquema llega a ser tan artificioso que Ptolomeo concede que es simplemente un medio para calcular, describir y predecir las posiciones aparentes de sol, luna y planetas, pero no dice cual es la posición real de estos cuerpos, y además, en algunos casos las predicciones aciertan, y en otros, no. A partir de aquí, la Astronomía como ciencia que describe el movimiento de los astros y su situación, y la Cosmología, que intenta explicar el Universo, siguen caminos separados. Sin embargo, en el siglo XVI,



surge la figura de Copérnico, que consigue reconciliar ambas ramas de la filosofía al dar una explicación heliocéntrica del universo. La novedad fundamental de su teoría consiste en situar el centro del Universo en el sol y el centro de las órbitas planetarias en un punto próximo a él, mientras que la luna gira en torno de la Tierra. Sin embargo, sigue empeñado en que todos los movimientos son estrictamente circulares.

Este sistema permite explicar correctamente también las retrogradaciones planetarias y las fases de la luna, debido a los distintos tamaños de las órbitas y las velocidades de traslación, que pueden producir movimientos aparentes de retroceso si el planeta donde se sitúa el observador tiene una velocidad angular distinta de la del planeta observado.

Después de Copérnico y de sus detractores como Tycho Brahe, que concibió un sistema mixto, geocéntrico pero con cuerpos girando alrededor del sol, es Johannes Kepler el que demuestra la validez definitiva de la astronomía heliocéntrica con toda la fuerza de la argumentación matemática. A partir de los datos aportados por la observación, concluyó que los planetas se movían en órbitas elípticas, con velocidades variables, y teniendo el sol en uno de los focos de la elipse. La velocidad variable de los planetas es tal que “barren” áreas iguales en tiempos iguales. Kepler determinó también que todos los cuerpos que describen órbitas cerradas lo hacen a lo largo de una elipse, como los cometas, aunque, en este caso, la excentricidad es mucho mayor que para una órbita planetaria.

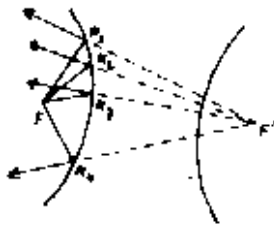
Si un cuerpo celeste sigue una órbita abierta, es decir, entra en el sistema solar, para después abandonarlo y no regresar, dicha órbita será una hipérbola o una parábola, con el cuerpo que lo atrae situado también en un foco. Si un cometa sigue una órbita con excentricidad próxima a 1, el más pequeño error de observación nos puede llevar a equivocarnos el tipo de trayectoria, puesto que las excentricidades menores que 1 corresponden a elipses (Cerradas) y las mayores que 1 a hipérbolas (Abiertas), reservándose el caso de excentricidad 1 para las parábolas, frontera entre los dos tipos anteriores.

## TÉCNICA.



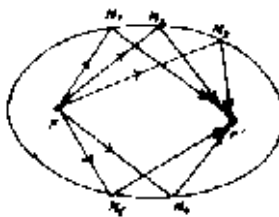
Como hemos visto en el estudio de la parábola, su interesante propiedad de reflexión le da dos aplicaciones contrarias en el campo de la tecnología:

- Si situamos un emisor de luz en su foco, todos los rayos formarán un potente haz luminoso paralelo al eje. Esto tiene una aplicación directa en la construcción de los faros de todos los vehículos y en los reflectores de todo tipo, que son paraboloides de revolución.
- Si construimos una antena receptora en forma de paraboloides de revolución con el elemento receptor situado en el foco, toda radiación proveniente de una dirección paralela al eje se concentrará en el receptor, luego si enfocamos el eje en la dirección correcta, la recepción será óptima. Esto se utiliza en la construcción de hornos solares y antenas de comunicaciones.



De modo semejante a como se ha hecho con la parábola, se puede estudiar la reflexión en hipérbolas y parábolas, para descubrir su comportamiento:

- Si situamos un foco de luz en el foco de una hipérbola, los rayos de luz rebotan en ella siguiendo la recta que une el punto de incidencia con el otro foco. Esto hace que la hipérbola difumine la luz.
- Si situamos un foco emisor en el foco de una elipse, las ondas emitidas rebotan en la elipse de manera que se concentran en el otro foco. Desde un punto de vista de las ondas sonoras, esto puede tener aplicaciones interesantes, por ejemplo.



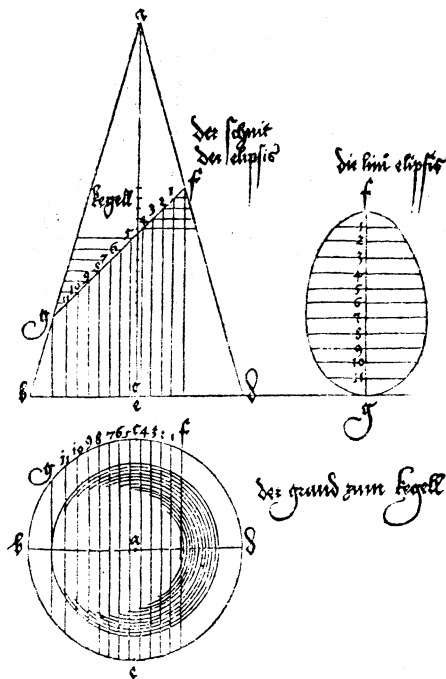
Otro campo de la técnica íntimamente relacionado con las cónicas es el estudio de las trayectorias de proyectiles, pues éstos siempre siguen una parábola cuyas características se pueden determinar a partir de la fuerza inicial. Esto tiene importantes aplicaciones militares, evidentemente.

También se utilizan las cónicas en la navegación espacial, puesto que se recurre a la atracción gravitacional para dar impulso y ahorrar combustible, con lo que hay que calcular adecuadamente las trayectorias para que la nave siga el camino elegido sin percances. En general, si dirigimos un cuerpo hacia una masa que lo atraiga gravitacionalmente, nos podemos encontrar con tres casos, según la dirección y la velocidad de este cuerpo: puede llevar una ruta de colisión parabólica, puede quedar en órbita elíptica, o puede adquirir una ruta de escape hiperbólica o parabólica.



**ARTE.**

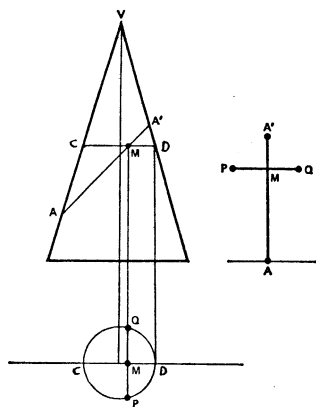
La utilización de las cónicas en el arte, así como de las superficies generadas a partir de ellas, es más que evidente. Basta ver, sobre todo en arquitectura, bóvedas, arcos, o cúpulas con secciones circulares, parabólicas o hiperbólicas. En escultura pueden verse ejemplos, sobre todo en arte abstracto, de composiciones cuya base son estas curvas.



Como ejemplo de su importancia e influencia, podemos ver el método utilizado por Alberto Durero para trazar una elipse. El dibujo es erróneo, por cierto.

Midiendo las longitudes de las cuerdas de la elipse de la derecha, se aprecia una diferencia entre cuerdas que deberían medir lo mismo. Sin embargo, a pesar del error, el método utilizado es absolutamente correcto.

Si observamos el siguiente dibujo, vemos como funciona: se toma el alzado de un cono, que se corta mediante un plano AA' que generará una elipse.

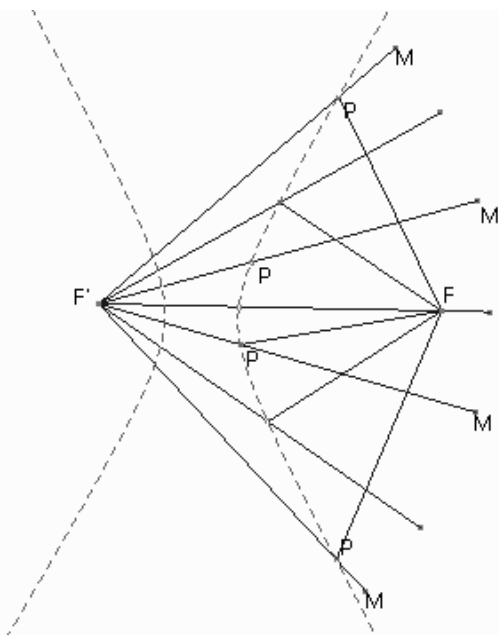


Esta elipse se intersecta con una circunferencia CD, dando los puntos de corte entre ambas curvas Q y P, como se expresa debajo. Así pues, el segmento QP es una cuerda de la circunferencia cuyos extremos son dos puntos de la elipse, y AA' es el eje mayor de dicha elipse. Transportando el resultado a la derecha, tenemos determinados dos puntos de la elipse. Si repetimos el proceso, variando la posición de la circunferencia, obtendremos tantos pares de puntos de la elipse como queramos.

De una manera semejante se puede tener el trazado por puntos de la hipérbola y el de la parábola.

**APÉNDICE 1.****TRAZADO DE LAS CÓNICAS POR PUNTOS.****Circunferencia:** mediante un compás.**Elipse:** método del jardinero.Material: Un cordel, que representa la longitud  $2.a$ 

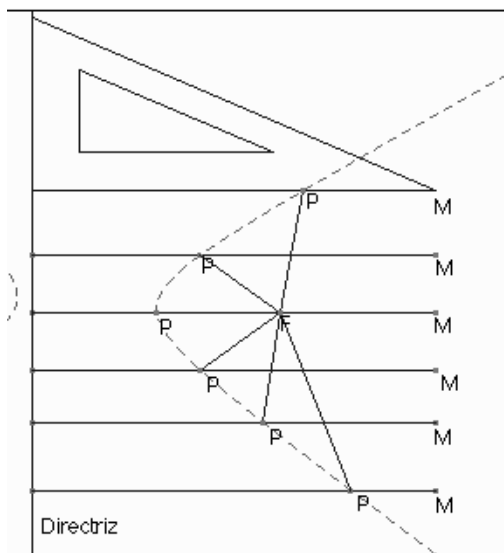
Método: se fijan los extremos del cordel a dos puntos, que son los focos, mediante chinchetas. Se tensa el cordel con la punta de un lápiz y se traza la elipse.

**Hipérbola:**Material: Una regla MF de longitud  $r$ , un cordel de longitud  $k$ ,  $k = MP + PF'$ .

Procedimiento: Fijamos un extremo del cordel en  $F'$ , y el otro al extremo de la regla. Se gira la regla manteniendo el centro del giro en  $F$ , lo que nos da distintas posiciones para el punto  $M$ . La cuerda se mantiene tensa mediante la punta de un lápiz, siempre pegado a la regla. Esto nos da distintas posiciones de un punto  $P$  de la hipérbola.

**Parábola:**Material: Un cartabón y una cuerda de longitud  $k = MP + PF = MQ$ 

Procedimiento: Se sujetan los extremos de la cuerda a un punto  $M$  y al extremo del cateto largo del cartabón,  $M$ . Se tensa la cuerda mediante la punta de un lápiz que se mantiene pegado al cartabón. Se desliza el cartabón a lo largo de la recta directriz y se van obteniendo puntos  $P$  de la parábola.



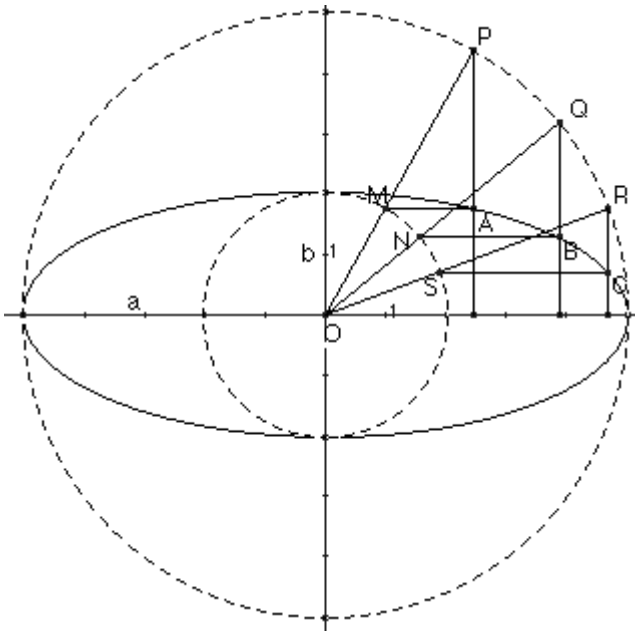


## APÉNDICE 2.

### LA ECUACIÓN PARAMÉTRICA DE LA ELIPSE.

Para acabar, una referencia a la ecuación paramétrica de la elipse y su interpretación gráfica. El opositor decidirá si introducirla o no en el desarrollo del tema, puesto que en definitiva, decidirá también que añade o suprime.

Consideramos dos circunferencias concéntricas de radios  $a$  y  $b$ , y tomamos un punto cualquiera ( $P, Q, R...$ ) de la circunferencia exterior. Sea  $\alpha$  el ángulo  $POX$ , formado por el segmento  $PO$  y el eje  $OX$ . El punto de intersección  $M$  de la circunferencia interior con  $OP$  tiene coordenadas  $(b \cdot \cos \alpha, b \cdot \sin \alpha)$ , mientras que  $P$  es  $(a \cdot \cos \alpha, a \cdot \sin \alpha)$ . Si trazamos paralelas a los ejes por  $M$  y  $P$ , obtendremos el punto de corte  $A$ , de coordenadas  $(a \cdot \cos \alpha, b \cdot \sin \alpha)$ , que pertenece a una elipse de semiejes  $a$  y  $b$ . De este modo, podemos obtener gráficamente cuantos puntos queramos de la elipse.





### APÉNDICE 3.

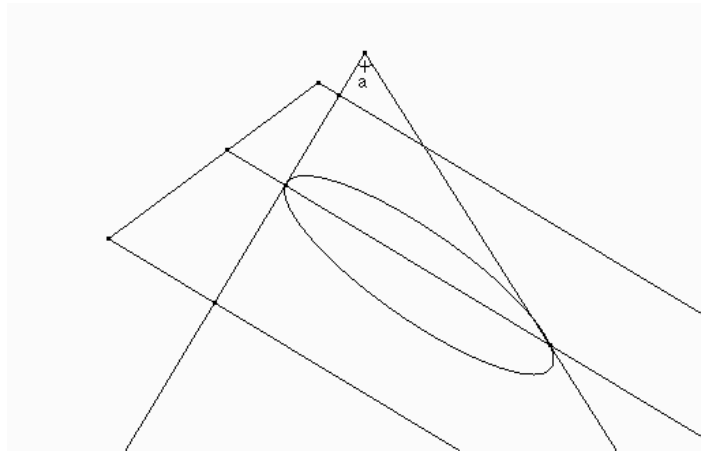
#### CLASIFICACIÓN DE LAS CÓNICAS.

det A ≠ 0	det A <sub>00</sub> ≠ 0	det A <sub>00</sub> > 0	signo (det A) = signo (a <sub>11</sub> +a <sub>22</sub> )      Elipse imaginaria	
			signo (det A) ≠ signo (a <sub>11</sub> +a <sub>22</sub> ) <a href="#">Elipse real</a>	
		det A <sub>00</sub> < 0	<a href="#">Hipérbola</a>	
	det A <sub>00</sub> = 0 <a href="#">Parábola</a>			
det A = 0	det A <sub>00</sub> ≠ 0	det A <sub>00</sub> > 0      Rectas no paralelas imaginarias		
		det A <sub>00</sub> < 0      Rectas no paralelas reales		
	det A <sub>00</sub> = 0	det A <sub>11</sub> + det A <sub>22</sub> ≠ 0		det A <sub>11</sub> + det A <sub>22</sub> > 0      Rectas paralelas imaginarias
				det A <sub>11</sub> + det A <sub>22</sub> < 0      Rectas paralelas reales
	det A <sub>11</sub> + det A <sub>22</sub> = 0      Rectas coincidentes			

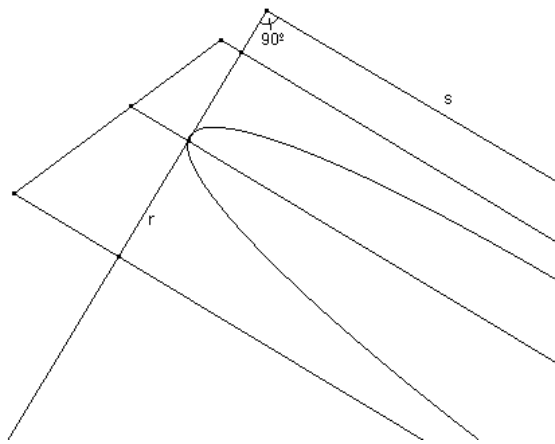
---

# MÉTODO DE Menecmo PARA LA OBTENCIÓN DE LAS CÓNICAS

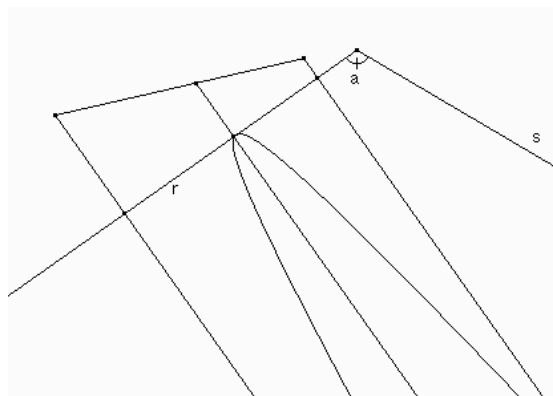
---



**ELIPSE**



**PARÁBOLA**

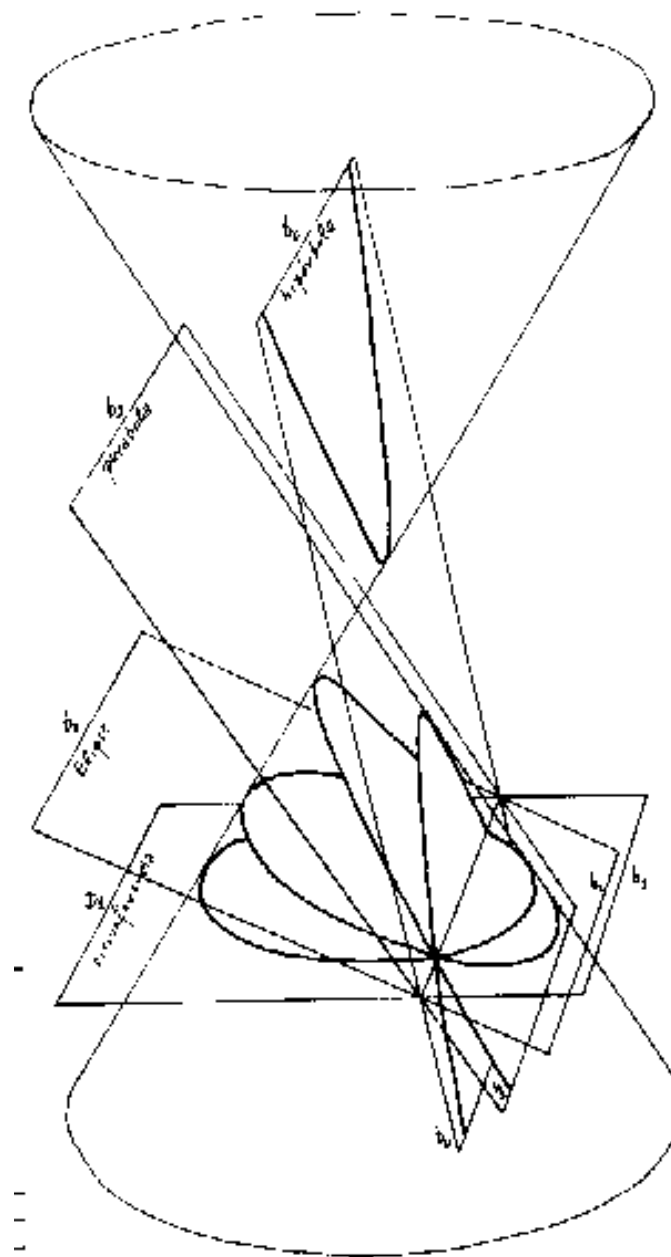


**HIPÉRBOLA**



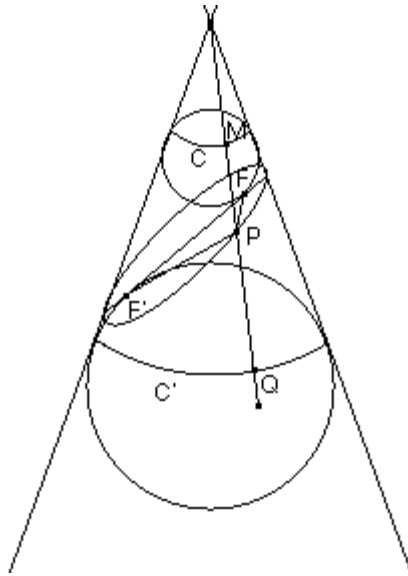
# PASO AL ESTUDIO PLANIMÉTRICO SEGÚN APOLONIO

---

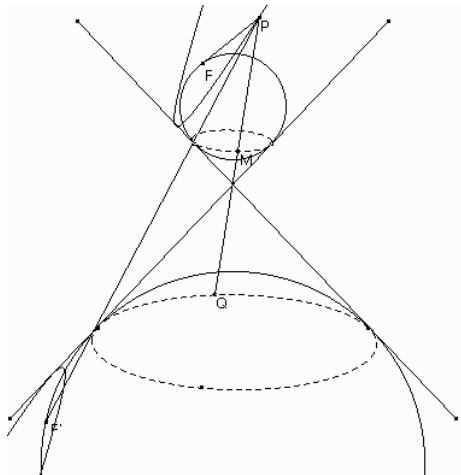


# PASO AL ESTUDIO PLANIMÉTRICO SEGÚN APOLONIO

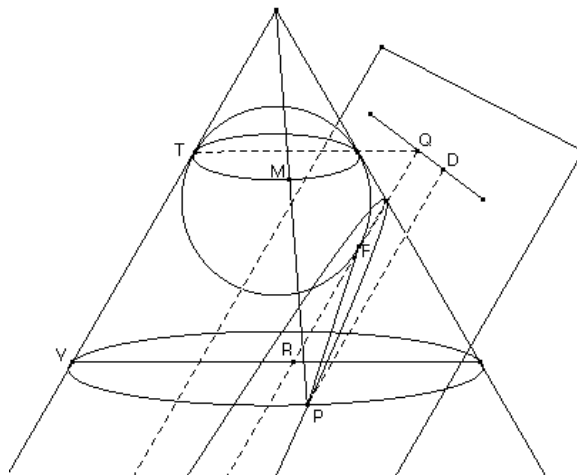
---



**ELIPSE**



**HIPÉRBOLA**

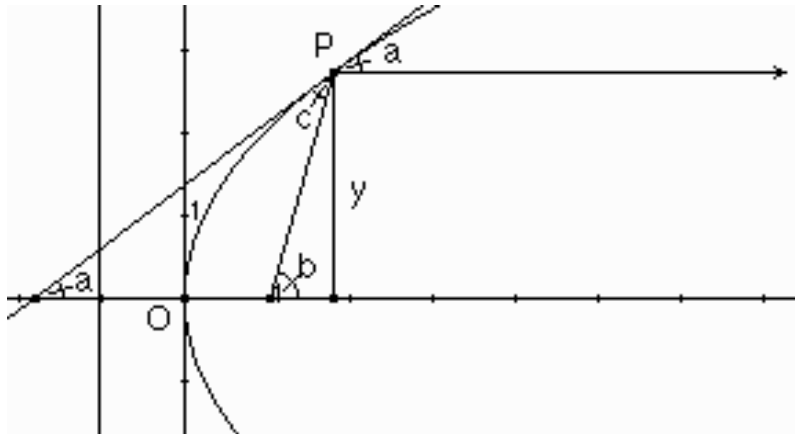


**PARÁBOLA**

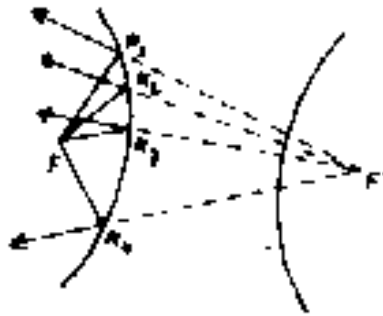
---

# PROPIEDADES FOCALES DE LAS CÓNICAS

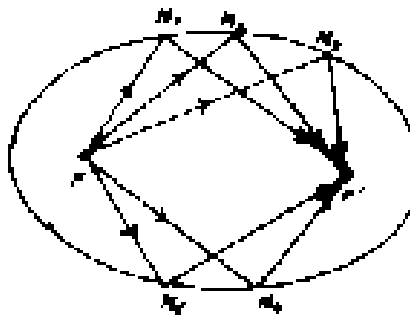
---



## PROPIEDAD FOCAL DE LA PARÁBOLA



## PROPIEDAD FOCAL DE LA HIPÉRBOLA



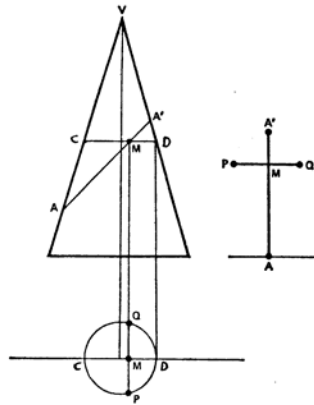
PROPIEDAD

FOCAL DE LA ELIPSE

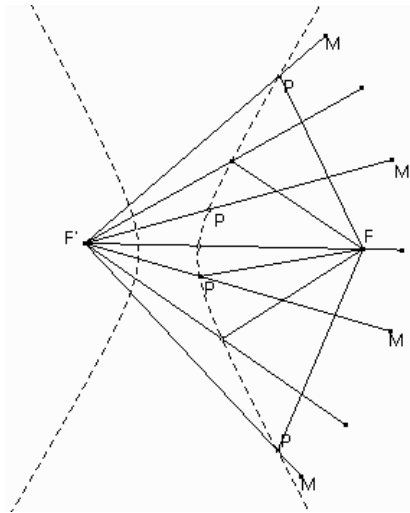
---

# TRAZADO DE CÓNICAS

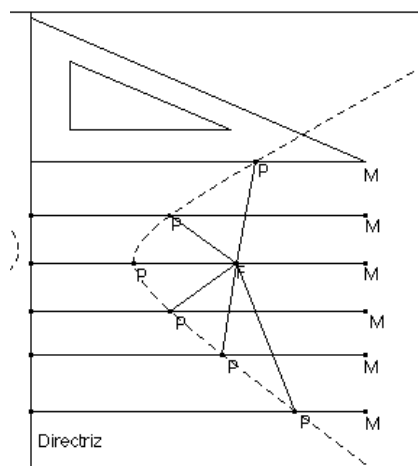
---



## MÉTODO DE DURERO



## TRAZADO DE LA HIPÉRBOLA.

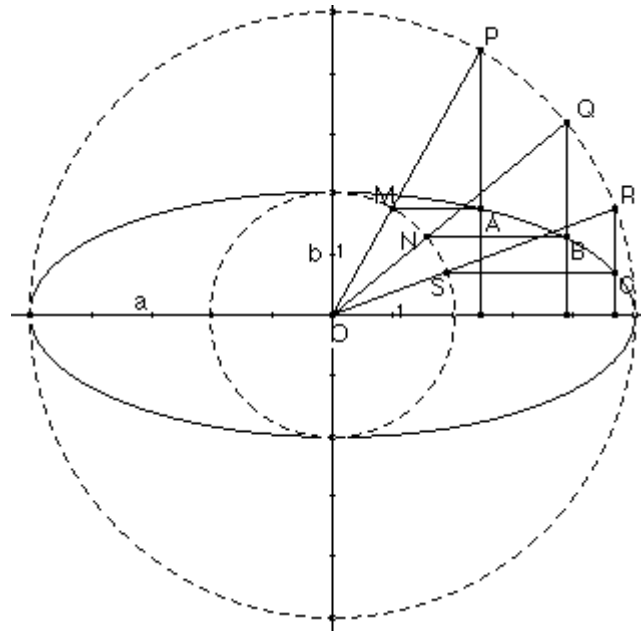


## TRAZADO DE LA PARÁBOLA

---

# TRAZADO DE CÓNICAS

---



## TRAZADO DE LA ELIPSE